МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

(часть 2)

Учебно-методическое пособие

Составители:
Н. М. Новикова,
В. Г. Ляликова

ВОРОНЕЖ
2015

Утверждено научно-методическим советом факультета прикладной математики, информатики и механики от 3.12.15, протокол № 4

Рецензент профессор кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета ВГУ доктор физико-математических наук, профессор В.В. Провоторов

Учебно-методическое пособие подготовлено на кафедре технической кибернетики и автоматического регулирования факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета.

Рекомендуется для студентов 2 курса дневного отделения факультета прикладной математики, информатики и механики.

Для направления 01.03.02 – Прикладная математика и информатика

СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

Величина X называется случайной, если она принимает то или иное свое значение лишь в результате опыта, и до опыта невозможно узнать, какое из значений она примет. Случайные величины будем обозначать прописными (большими) латинскими буквами X, Y, Z, а их возможные значения (реализации) – соответствующими строчными (малыми буквами) x, y, z. Случайные величины делятся на два класса: дискретные и непрерывные.

Любая случайная величина задается своим законом распределения. Закон распределения случайной величины X – это любое правило (таблица, функция), позволяющее находить вероятности всевозможных событий, связанных со случайной величиной. Наиболее общей формой закона распределения, пригодной для всех случайных величин (как дискретных, так и непрерывных), является функция распределения F(x). Функцией распределения (интегральным законом) F(x) случайной величины X называется вероятность того, что X примет значение, меньшее чем заданное x: F(x)=P(X<x).

Для любой случайной величины функция распределения обладает свойствами:

1. F(x) – неубывающая функция, т. е. $F(x_1) \le F(x_2)$, если $x_1 < x_2$.
2. F(x) – ограниченная функция. $0 \le F(x) \le 1,\ -\infty < x < \infty,\ \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1,$

$\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

3. Вероятность попадания случайной величины X в полуоткрытый промежуток [a,b) находится по формуле $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$

Случайные величины, помимо законов распределения, могут также описываться числовыми характеристиками, среди которых различают характеристики положения (математическое ожидание, мода, медиана и др.) и характеристики разброса (дисперсия, среднеквадратическое отклонение, различные моменты распределения порядка выше первого и др.).

Математическое ожидание случайной величины всегда определяет некоторое «среднее» значение, около которого группируются возможные значения случайной величины. Дисперсия и среднеквадратическое отклонение характеризуют степень разброса значений случайной величины относительно своего математического ожидания.

1.1 ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайная величина называется дискретной, если ее возможные значения можно пронумеровать. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным (в этом случае множество всех возможных значений называют счетным).

Дискретная случайная величина X может быть задана законом распределения или функцией распределения F(x) (интегральным законом распределения). Законом распределения дискретной случайной величины называют перечень ее возможных значений и соответствующих им вероятностей. Закон распределения дискретной случайно величины X может быть задан в виде ряда распределения (таблицы). Рядом распределения называется совокупность всех возможных значений x_i и соответствующих им вероятностей $p_i = P(X = x_i)$

x_1	x_2	...	x_n	...
p_1	p_2	...	p_n	...

где $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Если множество возможных значений X бесконечно (счетно), то ряд $p_1 + p_2 + ..$ сходится и его сумма равна единице.

Закон распределения дискретной случайно величины X может быть также задан аналитически (в виде формулы) $P(X = x_i) = \varphi(x_i)$.

Закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически. Графическое изображение ряда распределения называется многоугольником распределения.

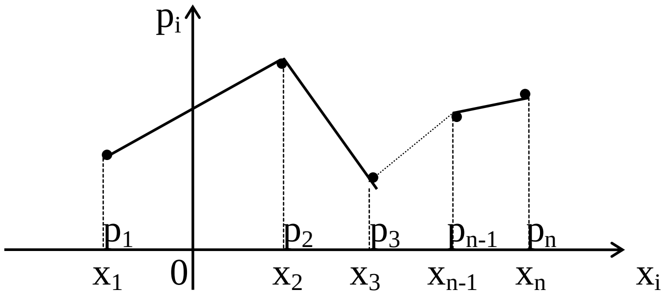


Рис.1. Многоугольник распределения

Зная закон распределения дискретной случайной величины можно вычислить функцию распределения, представляющую собой, функцию накопленных вероятностей и которая вычисляется по формуле $F(X) = \sum_{x_i < x} P\{X = x_i\} = \sum_{x_i < x} p_i$, где суммирование ведется по всем значениям i, для которых $x_i < x$.

Из этой формулы следует, что $F(x_k+0)-F(x_k)=P(X=x_k)$, $x_k=\{x_1,x_2,..\}$, т. е. функция распределения дискретной случайной величины испытывает скачки в точках x, для которых существует вероятность события $\{X=x\}$.

Таким образом, функция распределения дискретной случайной величины является кусочно-постоянной функцией со скачками в точках, являющихся значениями случайной величины. Величины скачков равны вероятностям, с которыми эти значения принимаются.

Определим основные числовые характеристики дискретных случайных величин.

Математическое ожидание равно сумме произведений всех возможных ее значений на вероятности этих значений:

$$m_x=M[X]=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\,p_i \qquad (1),$$

где x_i – возможные значения случайной величины X, p_i – соответствующие им вероятности,

Дисперсия это математическое ожидание квадрата центрированной случайной величины.

$$D[X]=M[(X-m_x)^2]=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-m_x)^2\,p_i\,. \qquad (2)$$

Среднеквадратичное отклонение σ - это квадратный корень из дисперсии

$$\sigma=+\sqrt{D[X]}\,. \qquad (3)$$

Обычно для вычисления дисперсии используется следующая расчетная формула

$$D[X]=M[X^2]-(M[X])^2\,. \qquad (4)$$

Величина $M[X^2]$ находится по формуле

$$M[X^2]=\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2\,p_i\,. \qquad (5)$$

Начальный момент α_k и центральный момент μ_k моменты k-го порядка дискретной случайной величины определяются формулами:

$$\alpha_k=m_k=M[X^k]=\sum_{i=1}^{\infty}x_i^{\,k}\,p_i\,, \qquad (6)$$

$$\mu_k=M[(X-m_x)^k]=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-m_x)^k\,p_i\,, \qquad (7)$$

где $M[X^k]$ - математическое ожидание X^k, m_x – математическое ожидание.

Пример 1.1. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных, найти функцию распределения F(x) и начертить ее график.

Решение. Случайная величина – число стандартных деталей среди отобранных деталей имеет следующие возможные значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Найдем вероятности возможных значений X по формуле (комбинаторный метод вычисления вероятностей):

$$P(X = k) = \frac{C_N^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$$

(N- число деталей в партии, n – число стандартных деталей в партии, m – число отобранных деталей, k – число стандартных деталей среди отобранных).

Получим:

$$P(x=0) = \frac{C_8^0 C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1 \cdot 2}{10 \cdot 9} = \frac{1}{45};$$

$$P(x=1) = \frac{C_8^1 C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{8 \cdot 2}{45} = \frac{16}{45};$$

$$P(x=2) = \frac{C_8^2 C_2^0}{C_{10}^2} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 45} = \frac{28}{45}.$$

Искомый закон распределения

x_i	0	1	2
p_i	1/45	16/45	28/45

Контроль: 1/45+16/45+28/45=1.

Теперь найдем функцию распределения случайной величины X.

1. По определению функции распределения, если $x \le 0$, то F(x)=0. Действительно, значений, меньших числа 0, величина X не принимает. Следовательно, при $x \le 0$ функция $F(x) = P(X < x) = 0$.

2. Если $0 < x \le 1$, то $F(x) = P\{X = 0\} = 1/45$. Действительно, X может принять значение 0 с вероятностью 1/45.

3. Если $1 < x \le 2$, то $F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = 1/45 + 16/45 =$ $= 17/45$. Действительно, X может принять значение 0 с вероятностью 1/45 и значение 1 с вероятностью 16/45; следовательно, одно из этих значений, безразлично какое, X может принять (по теореме сложения вероятностей несовместных событий) с вероятностью 1/45+16/45=17/45.

4. Если $x > 2$, то $F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} =$ $= 1/45 + 16/45 + 28/45 = 1$. Действительно, событие $X \le 2$ достоверно и вероятность его равна единице.

Итак, искомая функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ 1/45 & \text{при } 0<x\le 1,\\ 17/45 & \text{при } 1<x\le 2,\\ 1 & \text{при } x>2.\end{cases}$$

График этой функции приведен на рис.2.

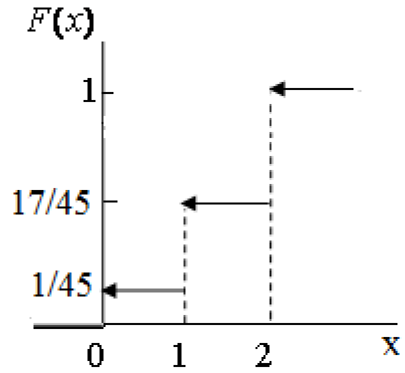


Рис.2. График функции распределения

Пример 1.2. Производится три независимых опыта, в каждом из которых событие А появляется с вероятностью 0,4. Рассматривается случайная величина X – число появлений события А в трех опытах. Построить ряд распределения и функцию распределения случайной величины X.

Решение. Случайная величина X – число появлений события А в трех опытах**.** X принимает следующие значения $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2,\ x_4=3$.

Найдем вероятности возможных значений X. Появление события А в каждом опыте является независимым событием, вероятность появления события всегда одинакова, поэтому применима формула Бернулли $P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$. Учитывая, что n=3 (количество опытов), p=0,4, следовательно, q=0,6, получим:

$P(X=0)=P_3(0)=q^3=0{,}6^3=0{,}216,$

$P(X=1)=P_3(1)=C_3^1\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6^2=0{,}432,$

$P(X=2)=P_3(2)=C_3^2\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}6=0{,}288,$

$P(X=3)=P_3(3)=p^3=0{,}4^3=0{,}064.$

Контроль 0,216+0,432+0,288+0,064=1.

Составляем ряд распределения:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,216	0,432	0,288	0,064

Найдем функцию распределения F(x). По определению:

1. Если $x\le 0$, то $F(x)=0$.
2. Если $0<x\le 1$, то $F(x)=P\{X=0\}=0{,}216$.

3. Если $1 < x \le 2$, то $F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = 0{,}216 + 0{,}432 = 0{,}648$. Очевидно, что $F(2) = 0{,}648$.
4. Если $2 < x \le 3$, то $F(x) = P\{X < x\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\}$ $F(x) = 0{,}216 + 0{,}432 + 0{,}288 = 0{,}936$. Т. е. F(3)=0,936.
5. Если $x > 3$, то $F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} + P\{X = 3\} =$ $= 0{,}216 + 0{,}432 + 0{,}288 + 0{,}064 = 1$.

Функция распределения показана на рис.3.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ 0{,}216 & \text{при } 0 < x \le 1, \\ 0{,}648 & \text{при } 1 < x \le 2, \\ 0{,}936 & \text{при } 2 < x \le 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

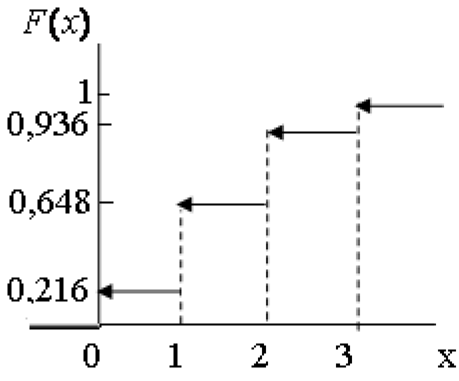


Рис.3 График функции распределения

Пример 1.3. Бросают n игральных костей. Найти математическое ожидание и дисперсию числа очков, которые выпадут на всех гранях.

Решение. Обозначим через X – сумму числа очков, которые выпадут на всех гранях; через X_i (i=1,2,..,n) – число выпавших очков на грани i- ой кости. Тогда, очевидно,

$$X = X_1 + X_2 + .. + X_n.$$

Очевидно, все величины X_i имеют одинаковое распределение, а значит, и одинаковые числовые характеристики, в частности, одинаковые математические ожидания и дисперсии, т. е.

$$M[X_1] = M[X_2] = .. = M[X_n],$$
$$D[X_1] = D[X_2] = .. = D[X_n].$$

Так как рассматриваемые случайные величины независимы, то

$M[X] = M[X_1 + X_2 + .. + X_n] = M[X_1] + M[X_2] + .. + M[X_n]$,

$D[X] = D[X_1 + X_2 + .. + X_n] = D[X_1] + D[X_2] + .. + D[X_n]$.

Т. е. $M[X] = n \cdot M[X_1]$ и $D[X] = n \cdot D[X_1]$

Таким образом, достаточно вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины X_1, т.е. математическое ожидание и дисперсию числа очков, которые могут выпасть на первой кости. Для этого запишем закон распределения случайной величины X_1

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$m_x = M[X_1] = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} x_i = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{7}{2},$$ т. е. $M[X] = (7/2)n$.

Теперь найдем дисперсию, для этого напишем закон распределения случайной величины X_1^2:

x_i^2	1	4	9	16	25	36
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$D[X_1] = M[X_1^2] - (M[X_1])^2$$

$$M[X_1^2] = 1\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 9\cdot\frac{1}{6} + 16\cdot\frac{1}{6} + 25\cdot\frac{1}{6} + 36\cdot\frac{1}{6} = \frac{91}{6}.$$

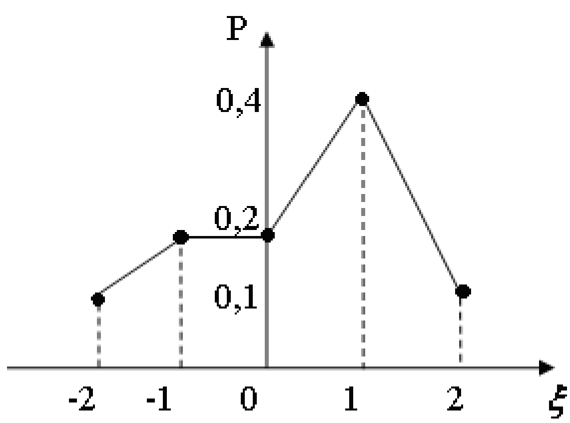
$$D[X_1] = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12},$$ т. е. $D[X] = \frac{35}{12} n$.

Пример 1.4. Дан ряд распределения случайной величины x:

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

Требуется построить: 1) многоугольник распределения; 2) построить функцию распределения $F(x)$ и начертить ее график; 3) найти вероятность того, что величина x примет значение, не превосходящее по абсолютной величине 1; 4) найти M[X], D[X], σ

Решение. 1) многоугольник распределения показан на рисунке 4.



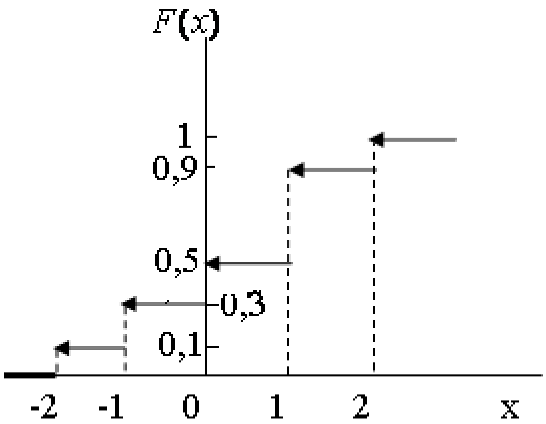


Рис.4 Многоугольник распределения :.5 График функции распределения

2) найдем функцию распределения $F(x)$. График функции распределения показан на рисунке 5.

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le -2,\\ 0{,}1 & \text{при } -2<x\le -1,\\ 0{,}3 & \text{при } -1<x\le 0,\\ 0{,}5 & \text{при } 0<x\le 1,\\ 0{,}9 & \text{при } 1<x\le 2,\\ 1 & \text{при } x>2.\end{cases}$$

3) Вероятность того, что величина x примет значение, не превосходящее по абсолютной величине 1, найдем, используя определение функции распределения.

$P\{-1\le X\le 1\}=P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)=0{,}8$.

4) Используя формулу (1) найдем математическое ожидание случайной величины.

$$M[X]=\sum_{i=1}^{5}x_i p_i=-2\cdot 0{,}1+(-1)\cdot 0{,}2+0\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}4+2\cdot 0{,}1=0{,}2.$$

Используя формулы (4), (5) и (3) найдем дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины.

Составим ряд распределения для случайной величины x^2:

x_i^2	4	1	0	1	4
p_i	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

$$M[X^2]=\sum_{i=1}^{5}x_i^2 p_i=4\cdot 0{,}1+1\cdot 0{,}2+0\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}4+4\cdot 0{,}1=1{,}4$$

$D[X]=M[X^2]-(M[X])^2=1{,}4-(0{,}2)^2=1{,}36$.

$\sigma=\sqrt{1{,}36}=1{,}166$.

Ответ. $P\{-1\le X\le 1\}=0{,}8$, M[X]=0,2, D[X]=1,36, $\sigma\approx 1{,}166$.

Пример 1.5. Случайная величина ξ распределена по следующему закону:

ξ_i	-1	0	1
p_i	0,2	0,3	0,5

Найти $M[\xi^4]$ и $D[\xi^4]$.

Решение. Для решения задачи воспользуемся формулами (1), (2) и (4). Из формулы (1) для случайной величины ξ^4 получим формулу

$$M[\xi^4]=\sum_{i=1}^{3}\xi_i^4 p_i.$$

Из формул (2) и (4) получим:

$$D[\xi^4]=\sum_{i=1}^{3}(\xi_i-M[\xi^4])^2 p_i \text{ или } D[\xi^4]=M[\xi^8]-(M[\xi^4])^2.$$

Для нахождения $M[\xi^4]$ составим ряд распределения для случайной величины ξ^4:

ξ^4	1	0	1
p	0,2	0,3	0,5

$M[\xi^4]=\sum_{i=1}^{3}\xi_i{}^4 p_i=1\cdot 0{,}2+0\cdot 0{,}3+1\cdot 0{,}5=0{,}7$.

$M[\xi^4]=M[\xi^8]$.

Рассмотрим первый способ нахождения дисперсии.

$D[\xi^4]=\sum_{i=1}^{3}(x_i-M[\xi^4])^2 p_i=0{,}2\cdot(-1-0{,}7)^2+0{,}3\cdot(0-0{,}7)^2+0{,}5\cdot(1-0{,}7)^2=$
$=0{,}018+0{,}147+0{,}045=0{,}21$.

Рассмотрим второй способ нахождения дисперсии.

$D[\xi^4]=M[\xi^8]-(M[\xi^4])^2=0{,}7-(0{,}7)^2=0{,}21$.

Ответ: $M[\xi^4]=0{,}7$, $D[\xi^4]=0{,}21$.

1.2. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Биномиальным называют закон распределения дискретной случайной величины X – числа появлений события в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность успеха или появления события равна p, а вероятность неудачи q=1-p. Вероятность возможного значения X=m (числа m появлений события) вычисляют по формуле Бернулли:

$$P(X=m)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}. \qquad (8)$$

Если число испытаний велико ($n\to\infty$), а вероятность p появления события в каждом испытании очень мала ($p\to 0$), то используют приближенную формулу

$$P\{X=k\}\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}. \qquad (9)$$

где k - число появлений события в n независимых испытаниях, $np=\lambda=const$ (среднее число появлений события в n испытаниях), и говорят, что случайная величина распределена по закону ***Пуассона.*** Закон Пуассона появляется там, где производится большое число испытаний, в каждом из которых с малой вероятностью происходит редкое событие.

Геометрическим называют распределение дискретной случайной величины, равной количеству испытаний случайного эксперимента до наблюдения первого успеха.

Обозначим через X дискретную случайную величину - число испытаний, которые нужно провести до первого появления события A.

$$P\{X = k\} = q^k p,\ k = 0,1,2.. \qquad (10)$$

Распределение случайной величины X называется геометрическим с вероятностью успеха p и вероятностью неудачи q=1-p.

Иногда полагают, что X - номер первого успеха, тогда вероятность возможность значения $X=k$ принимает форму

$$P\{X = k\} = q^{k-1} p,\ k = 1,2.. \qquad (11)$$

Полагая $k = 0,1,2..$ в формуле (10) или $k = 1,2..$ в формуле (11) получим геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем q (0<q<1). По этой причине распределение (10) или (11) называют геометрическим.

В таблице 1 приведены основные числовые характеристики для следующих дискретных распределений: биномиального, Пуассона, геометрического.

Наименование распределения	Параметры	M[X]	D[X]	$\sigma = \sqrt{D[X]}$
Биномиальное	n,p,q	$n \cdot p$	$n \cdot p \cdot q$	$\sqrt{npq}$
Пуассона	λ	λ	λ	$\sqrt{\lambda}$
Геометрическое $P\{X = k\} = q^k p$	p,q	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{\sqrt{q}}{p}$
Геометрическое $P\{X = k\} = q^{k-1} p$	p,q	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{\sqrt{q}}{p}$

Пример 1.6. На зачете студент получил 4 задачи. Вероятность решить правильно каждую задачу p=0,8. Определить ряд распределения и построить функцию распределения случайной величины X – числа правильно решенных задач.

Решение. В данном примере имеем дело с биномиальным законом. Случайная величина X – число правильно решенных задач принимает следующие возможные значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$. Подставляя в формулу (8) значения n=4, m=0..4, p=0,8, q=0,2, получаем ряд распределения и функцию распределения, представленную на рисунке 6.

$P(X = 0) = P_4(0) = q^4 = 0{,}2^4 = 0{,}0016,$

$P(X = 1) = P_4(1) = C_4^1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}0256,$

$P(X=2)=P_4(2)=C_4^2\cdot 0{,}8^2\cdot 0{,}2^2=0{,}1536,$

$P(X=3)=P_4(3)=C_4^3\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2=0{,}4096,$

$P(X=4)=P_4(4)=p^4=0{,}8^4=0{,}4096.$

x_i	0	1	2	3	4
p	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

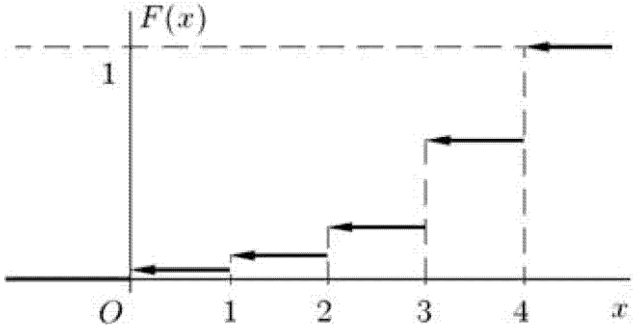


Рис. 6 График функции распределения

Пример 1.7. Вероятность получить заданный эффект в физическом опыте равна 0,4. Определить ряд распределения и построить функцию распределения случайной величины X, равной числу пустых опытов, которые должен произвести экспериментатор, прежде чем он получит необходимый эффект.

Решение. X дискретная случайная величина, равная числу опытов, которые необходимо провести до наступления первого успеха. Таким образом, случайная величина X распределена по геометрическому закону. Для нахождения ряда распределения воспользуемся формулой (10), где p=0,4, q=0,6. Получим:

$P\{X=0\}=q^0\cdot p=0{,}4,$

$P\{X=1\}=q^1\cdot p=0{,}6\cdot 0{,}4=0{,}24,$

$P\{X=2\}=q^2\cdot p=0{,}6^2\cdot 0{,}4=0{,}144,$

$P\{X=3\}=q^3\cdot p=0{,}6^3\cdot 0{,}4=0{,}0864$ и так далее.

x_i	0	1	2	3	…
p	0,4	0,24	0,144	0,0864	…

График функции распределения представлен на рисунке 7.

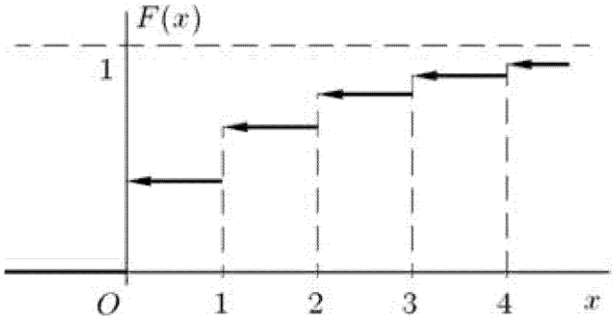


Рис. 6 График функции распределения

Пример 1.8. Учебник издан тиражом 100000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно пять бракованных книг.

Решение. По условию n=100000, p=0,0001, k=5. События, состоящие в том, что книги сброшюрованы неправильно, независимы, число n велико, а вероятность p мала, поэтому воспользуемся распределением Пуассона $P\{X=k\}\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$. Найдем λ: $\lambda=np=100000\cdot 0{,}0001=10$.

Искомая вероятность

$$P_{100000}(5)\approx\frac{10^5}{5!}\cdot e^{-10}=\frac{10^5}{120}\cdot 0{,}000045\approx 0{,}0375.$$

Пример 1.9. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятности того, что магазин получит разбитых бутылок: 1) ровно две; 2) менее двух; 3) более двух; 4) хотя бы одну.

Решение. Число n=1000 велико, вероятность p=0,003 мала и рассматриваемые события независимы, поэтому имеет место формула Пуассона.

1) найдем λ: $\lambda=np=1000\cdot 0{,}003=3$. Найдем вероятность того, что будет разбито ровно две (k=2) бутылки:

$$P_{1000}(2)\approx\frac{3^2}{2!}\cdot e^{-3}\approx\frac{9}{2}\cdot 0{,}04979\approx 0{,}224.$$

2) найдем вероятность того, что будет разбито менее двух бутылок (т.е. либо не будет разбитых бутылок, либо будет одна разбитая бутылка) по теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P_{1000}(0)+P_{1000}(1)\approx e^{-3}+3\cdot e^{-3}\approx 4\cdot 0{,}04979\approx 0{,}1992.$$

3) введем событие A ={будет разбито более двух бутылок}, тогда противоположное событие $\overline{A}$ = {будет разбито не более двух бутылок}. Таким образом, можно найти искомую вероятность по формуле противоположных событий $P(A)=1-P(\overline{A})$. Найдем вероятность того, что будет разбито не более двух бутылок.

$P(\overline{A}) = P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2) = e^{-3}(1+3+4{,}5) \approx 8{,}5 \cdot 0{,}04979 \approx 0{,}4232.$
Теперь можем найти вероятность того, что будет разбито более двух бутылок:
$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}4232 = 0{,}5768.$

4) события А = {будет разбитых хотя бы одна бутылка} и $\overline{A}$ = {не будет ни одной разбитой бутылки} противоположны и образуют полную группу событий, т .е. $P(A) = 1 - P(\overline{A})$. Отсюда искомая вероятность того, что магазин получит хотя бы одну разбитую бутылку, равна

$$P(A) = 1 - P_{1000}(0) = 1 - e^{-3} \approx 1 - 0{,}04979 \approx 0{,}95.$$

Задачи для самостоятельной работы

1.1. Построить ряд распределения и функцию распределения для числа появлений гербов при однократном бросании трех монет.

1.2. Из урны, содержащей 4 белых и 6 черных шаров, случайным образом и без возвращения извлекается 3 шара. Случайная величина X – число белых шаров в выборке. Описать закон распределения и найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

1.3. Производятся последовательные независимые испытания пяти приборов на надежность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надежным. Построить ряд распределения и функцию распределения F(x) случайного числа испытанных приборов, если вероятность выдержать испытания для каждого из них равна 0,9.

1.4. Два орудия стреляют по цели. Вероятности попадания в цель при одном выстреле для них равны соответственно 0,7 и 0,8. Для случайной величины X (числа попаданий в мишень при одном залпе) составить ряд распределения, найти функцию распределения и математическое ожидание.

1.5. Найти дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины X, заданной законом распределения

x	4,3	5,1	10,6
p	0,2	0,3	0,5

1.6. Закон распределения случайной величины X задан следующей таблицей

x	1	2	3	4
p	1/16	1/4	1/2	3/16

Найти математическое ожидание, дисперсию случайной величины X и P{X≥2}.

1.7. Определить математическое ожидание числа приборов, давших отказ за время испытаний на надежность, если испытанию подвергается один прибор, а вероятность его отказа равна *p*.

1.8. Функция распределения дискретной случайной величины X имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le -1,\\ 0{,}2 & \text{при } -1<x\le 0,\\ 0{,}5 & \text{при } 0<x\le 1,\\ 1 & \text{при } x>1.\end{cases}$$

Описать закон распределения случайной величины X и вычислить M[X], D[X].

1.9. Функция распределения случайной величины X дискретного типа имеет следующий вид:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 2,\\ 0{,}3 & \text{при } 2<x\le 3,\\ 0{,}5 & \text{при } 3<x\le 4,\\ 1 & \text{при } x>4.\end{cases}$$

Вычислить P{X≥3,5} и P{|X|<2,5}.

1.10. Случайная величина ξ имеет следующее распределение:

ξ	-1,0	-0,5	-0,1	0	0,1	0,2	0,5	1,0	1,5	2,0
p	0,005	0,012	0,074	0,102	0,148	0,231	0,171	0,160	0,081	0,016

Найти математическое ожидание, дисперсию и вычислить вероятность того, что ξ примет значение, на отрезке [-0,5; 0,5].

1.11. Известно, что случайная величина X, принимающая два значения $x_1=2$ и $x_2=3$, имеет математическое ожидание, равное 2,2. Построить ряд распределения случайной величины X и найти дисперсию.

1.12. Дан перечень возможных значений дискретной случайной величины X: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, а также известны математические ожидания этой величины и ее квадрата *M[X]=2,3*, $M[X^2]=5{,}9$. Найти вероятности, соответствующие возможным значениям X.

1.13. Найти математическое ожидание числа очков при бросании одной игральной кости.

1.14. Написать биномиальный закон распределения вероятностей дискретной случайной величины X – числа появления герба при двух бросаниях монеты.

1.15. Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины X – числа появлений события A в пяти независимых испытаниях, если вероятность появления события A в каждом испытании равна 0,2.

1.16. Случайная величина распределена по биномиальному закону.
$P(X=m)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$, m=0,..,n. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X..

1.17. Для стрелка, выполняющего упражнение в тире, вероятность попасть в «яблочко» при одном выстреле не зависит от результатов предшествующих выстрелов и равна p=1/4. Спортсмен сделал 5 выстрелов. Найти вероятность событий A={ровно одно попадание}, B={ровно два попадания}, C={хотя бы одно попадание}, D={не менее трех попаданий}.

1.18. В партии 10% нестандартных деталей. Наудачу отобраны четыре детали. Написать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных.

1.19. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени T равна 0,002. Найти вероятность того, что за время T откажут ровно три элемента.

1.20. Корректура в 500 страниц содержит 500 опечаток. Найти вероятность того, что на странице не меньше трех опечаток, считая число опечаток на странице подчиняющимся закону Пуассона с параметром, равным среднему числу опечаток, приходящемуся на одну страницу.

1.21. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в минуту, ровно 120. Найти вероятности следующих событий: A={за две секунды на АТС не поступит ни одного вызова}, B={за две секунды на АТС поступит менее двух вызовов}, C={за одну секунду на АТС поступит ровно три вызова}, D={за три секунды на АТС поступит не менее трех вызовов}.

1.22. Корректура в 500 страниц содержит 1300 опечаток. Найти наиболее вероятное число опечаток на одной странице текста и вероятность этого числа. Две опечатки с p=0,251**.**

1.23. Случайное число ошибочных соединений, приходящееся на одного телефонного абонента за рассматриваемый промежуток времени, подчиняется закону Пуассона с параметром, равным 8. Определить вероятность того, что для данного абонента за этот промежуток времени число ошибочных соединений превзойдет 4.

1.24. Аппаратура состоит из 1000 элементов, каждый из которых независимо от остальных выходит из строя за время T с вероятностью p=0,0005. Найти вероятности следующих событий: A={за время T откажет ровно 3 элемента}, B={за время T откажет хотя бы один элемент}, C={за время T откажет не более 3 элементов}.

1.25. Вероятность закатить хотя бы один шар в лузу при одном ударе бильярдиста постоянна и равна 0,7. Если при ударе закатить шар не удается, право удара переходит к другому игроку. Какова вероятность, что бильярдист сделает не менее 4 ударов.

1.26. Игральная кость подбрасывается до первого появления цифры. Найти математическое ожидание и дисперсию для случайной величины X числа осуществляемых подбрасываний.

1.27. Охотник-любитель стреляет из ружья по неподвижной мишени. Вероятность попасть в мишень при одном выстреле является величиной постоянной и равна 0,65. Стрельба по мишени ведется до первого попадания. Определить математическое ожидание числа израсходованных охотником патронов.

1.28. Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель p=0,6. Составить ряд распределения случайной величины X – количества истраченных снарядов, если: а) количество выстрелов неограниченно, б) можно произвести не более трех выстрелов.

1.3. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайная величина X называется непрерывной, если ее функция распределения $F(x)$ непрерывна на всей числовой оси и всюду, за исключением конечного числа точек, дифференцируема. При этом функция

$$f(x) = F'(x) \qquad (12)$$

называется плотностью распределения случайной величины X. Часто вместо термина плотность распределения используют термины плотность вероятностей и дифференциальная функция. Помимо дифференциальной существует следующая интегральная связь:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad (13)$$

Непрерывная случайная величина задается либо функцией распределения $F(x)$ – интегральным законом распределения, либо плотностью вероятности $f(x)$ – дифференциальным законом распределения.

Плотность вероятности (дифференциальный закон распределения) $f(x)$ обладает следующими основными свойствами:

1. $f(x) \geq 0$.
2. $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$.
3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (условие нормировки).
4. $P(a \leq X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$. Стоит заметить, что в левой части можно брать как строгие, так и ослабленные неравенства: $a < X$, $a \leq X$, $X < b$, $X \leq b$. Данное свойство остается справедливым в любом случае.

Определим основные числовые характеристики непрерывных случайных величин. Математическое ожидание M[X] и дисперсия D[X] непрерывной случайной величины X, имеющей плотность вероятности $f(x)$ вычисляются по формулам:

$$m_x = M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \tag{14}$$

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx \tag{15}$$

Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины обладают такими же свойствами, что и аналогичные вероятностные характеристики дискретных случайных величин. Среднее квадратичное отклонение σ определяется формулой $\sigma = +\sqrt{D[X]}$.

Начальный момент α_k и центральный момент μ_k - моменты k-го порядка непрерывной случайной величины определяются формулами:

$$\alpha_k = M[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx, \tag{16}$$

$$\mu_k = M[(X - m_x)^k] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k f(x) dx. \tag{17}$$

Отметим еще две важные характеристики распределения, связанные с моментами высшего порядка:

$a = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$ (коэффициент асимметрии или «скошенности» распределения),

$e = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ (коэффициент эксцесса или «островершинности» распределения).

Для симметричного закона распределения характеристикой рассеивания случайной величины может служить срединное отклонение E, определяемое из условия

$$P(|X - m_x| < E) = 1/2. \tag{18}$$

Часто вычисление моментов сводится к вычислению интегралов следующего вида:

$$J_n = \int_0^{\infty} t^n e^{-at^2} dt = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2a^{(n+1)/2}} \tag{19}$$

Тогда при четном n, т. е. при n=2k получим

$$J_{2k} = \Gamma(k + 1/2) = \frac{(2k-1)!!}{2^k}\sqrt{\pi} = \frac{(2k-1)*(2k-3)...3*1}{2^k}\sqrt{\pi}. \tag{20}$$

При нечетном n, т. е. n=2k+1 получим

$$J_{2k+1} = \Gamma(k+1) = k! \qquad (21)$$

Математическое ожидание - не единственная характеристика расположения случайной величины на числовой оси. В теории вероятностей применяют и другие характеристики положения: моду и медиану.

Модой d_x случайной величины X называется то значение, при котором плотность вероятности $f(x)$ достигает максимума.

Величина x_p, определяемая равенством

$$F(x_p) = p, \qquad (22)$$

называется квантилем порядка p. Квантиль $x_{0,5}$ называется медианой. Квантиль является одной из числовых характеристик распределения вероятностей.

Пример 1.10. Проекция X радиуса-вектора случайной точки окружности радиуса a на диаметр имеет функцию распределения (закон арксинуса).

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le -a, \\ 1/2 + \dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{a}, & \text{при } -a < x \le a \\ 1, & \text{при } x > a \end{cases}$$

Определить: 1) вероятность того, что X окажется в пределах промежутка (-a/2, a/2); 2) Квантиль $x_{0,75}$; 3) плотность вероятности $f(x)$ случайной величины X; 4) моду и медиану распределения.

Решение.

1) для того, чтобы найти вероятность попадания случайной величины в интервал (-a/2, a/2) воспользуемся 3-им свойством функции распределения

$$P\left(-\frac{a}{2} < X < \frac{a}{2}\right) = F\left(\frac{a}{2}\right) - F\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

2) согласно заданной функции распределения, уравнение (22) для определения квантили порядка 0,75 имеет вид

$1/2 + \dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x_{0,75}}{a} = 0{,}75$, откуда $\arcsin\dfrac{x_{0,75}}{a} = \dfrac{\pi}{4}$, т. е. квантиль $x_{0,75} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

3) используя формулу (12) найдем плотность распределения $f(x)$ случайной величины X

$f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx} = \dfrac{d}{dx}(1/2 + \dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{a}) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}$ для $x \in (-a, a)$, т. е.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & x\in(-a,a),\\ 0, & x\notin(-a,a).\end{cases}$$

4) как уже говорилось, модой распределения называется значение аргумента, при котором плотность *f(x)* достигает максимума. Закон арксинуса максимума не имеет, так как функция $f(x)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}$ не имеет максимума. Для того, чтобы найти медиану необходимо найти квантиль порядка 0,5. Согласно заданной функции распределения, уравнение (22) для определения квантили порядка 0,5 имеет вид $1/2+\dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x_{0,5}}{a}=0{,}5$, откуда $\arcsin\dfrac{x_{0,5}}{a}=0$, т. е. медиана $x_{0,5}=0$.

Ответ. 1) $P\left(-\dfrac{a}{2}<X<\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{1}{3}$; 2) $x_{0,75}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$;

3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & x\in(-a,a),\\ 0, & x\notin(-a,a).\end{cases}$; 4) $x_{0,5}=0$, моды нет.

Пример 1.11. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{1-\cos x}{2}, & 0<x\le\pi,\\ 1 & x>\pi.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины

Решение. Для того, чтобы найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение сначала необходимо найти плотность распределения $f(x)$ по формуле (12)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sin x, & x\in(0;\pi),\\ 0 & x\notin(0;\pi).\end{cases}$$

Математическое ожидание найдем по формуле (14)

$$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}x\sin x dx=\frac{1}{2}\left(-x\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x dx\right)=$$

$$= \frac{\pi}{2} + \sin x \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Для вычисления интеграла использовалась формула интегрирования по частям.

Для того, чтобы найти дисперсию воспользуемся следующей формулой: D[X]=M[X^2]-(M[X])^2. Теперь необходимо найти математическое ожидание X^2 . Используя формулу (16), получим

$$M[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx = -\frac{1}{2} x^2 \cos x \Big|_0^{\pi} + x \sin x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\pi^2 - 4\right).$$

При вычислении интеграла дважды использовалась формула интегрирования по частям. Теперь можно найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2 = \frac{1}{2}\left(\pi^2 - 4\right) - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4} - 2$, значит

$\sigma = \sqrt{D[X]} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi^2 - 8}$. Также дисперсию можно найти и используя формулу (15).

Ответ: $M[X] = \pi / 2$; $D[X] = \frac{1}{4}\left(\pi^2 - 8\right)$; $\sigma = \frac{1}{2}\sqrt{\pi^2 - 8}$.

Пример 1.12. Плотность вероятности случайной величины имеет график, изображенный на рис.7 (закон Симпсона). Написать выражение плотности и функции распределения это случайной величины. Найти математическое ожидание и дисперсию.

Решение. Напишем выражение для плотности распределения случайной величины.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ x+1, & -1 < x \le 0, \\ 1-x, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}.$$

Теперь, используя определение функции распределения случайной величины, найдем $F(x)$.

Если $x \le -1$, то $f(x) = 0$, следовательно,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}0dt=0.$$

Если $-1<x\le 0$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{-1}0dx+\int_{-1}^{x}(x+1)dx=(x^2/2+x)\Big|_{-1}^{x}=x^2/2+x+1/2=\frac{(x+1)^2}{2}.$$

Если $0<x\le 1$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{-1}0dx+\int_{-1}^{0}(x+1)dx+\int_{0}^{x}(1-x)dx=(x^2/2+x)\Big|_{-1}^{0}+(x-x^2/2)\Big|_{0}^{x}=1-\frac{(1-x)^2}{2}$$

Если $x>1$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{-1}0dx+\int_{-1}^{0}(x+1)dx+\int_{0}^{1}(1-x)dx+\int_{1}^{x}0dx=(x^2/2+x)\Big|_{-1}^{0}+(x-x^2/2)\Big|_{0}^{1}=1.$$

Т. е.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ \dfrac{(x+1)^2}{2}, & -1<x\le 0,\\ 1-\dfrac{(1-x)^2}{2}, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}.$$

Теперь найдем математическое ожидание и дисперсию.

$$M[X]=\int_{-1}^{0}(x^2+x)dx+\int_{0}^{1}(x-x^2)dx=(x^3/3+x^2/2)\Big|_{-1}^{0}+(x^2/2-x^3/3)\Big|_{0}^{1}=0.$$

$$D[X]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2f(x)dx=\int_{-1}^{0}(x^3+x^2)dx+\int_{0}^{1}(x^2-x^3)dx=(x^4/4+x^3/3)\Big|_{-1}^{0}+$$
$$+(x^3/3-x^4/4)\Big|_{0}^{1}=-1/4-1/3+1/3-1/4=1/6.$$

Ответ: *M[X]=0; D[X]=1/6.*

Пример 1.13. Случайная величина ξ распределена по закону Релея, т. е. имеет плотность

$$f(x)=\begin{cases}0, & \mathrm{x}\le 0,\\ Axe^{-h^2x^2}, & \mathrm{x}>0.\end{cases}.$$

Найти коэффициент А, медиану, моду, математическое ожидание и дисперсию.

Решение.

1) пользуясь условием нормировки (3-е свойство плотности вероятности $f(x)$) найдем коэффициент А

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{\infty} A\cdot x\cdot e^{-h^2x^2}dx = 1, \text{ значит } A = \frac{1}{\int_0^{\infty} x\cdot e^{-h^2x^2}dx}.$$

$\int_0^{\infty} x\cdot e^{-h^2x^2}dx = \frac{\Gamma(1)}{2h^2} = \frac{1}{2h^2}$, следовательно $A = 2h^2$. Для вычисления интеграла использовались формулы (19) и (21).

Т. е. плотность вероятности имеет вид: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 2h^2xe^{-h^2x^2}, & x > 0. \end{cases}$

2) найдем математическое ожидание и дисперсию

$$M[X] = \int_0^{\infty} 2h^2\cdot x^2\cdot e^{-h^2x^2}dx = 2h^2\,\frac{\Gamma(1+1/2)}{2h^3}.$$

Т.к. $\Gamma(1+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, значит $M[X] = 2h^2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{4h^3} = \frac{\sqrt{\pi}}{2h}$. Для вычисления интеграла использовались формулы (19) и (20).

$$M[X^2] = \int_0^{\infty} 2h^2\cdot x^3\cdot e^{-h^2x^2}dx = 2h^2\cdot\frac{\Gamma(2)}{2h^4} = \frac{1}{h^2}.$$

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2 = \frac{1}{h^2} - \frac{\pi}{4h^2} = \frac{4-\pi}{4h^2}.$$

3) для того, чтобы найти медиану, сначала необходимо по формуле (13) найти функцию распределения.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^{x} 2h^2\cdot x\cdot e^{-h^2x^2}dx = -e^{-h^2x^2}\Big|_0^x = 1 - e^{-h^2x^2}.$$

Для того, чтобы найти медиану необходимо найти квантиль порядка 0,5. Согласно полученной функции распределения, уравнение (22). Для определения квантили порядка 0,5 имеет вид

$1 - e^{-h^2x_{0,,5}^2} = 1/2$, следовательно $h^2x_{0,5}^2 = \ln 2$, значит $x_{0,5} = \frac{\sqrt{\ln 2}}{h}$.

4) для нахождения моды d_x найдем точки максимума $f(x)$. Получим: $f'(x) = 2h^2e^{-h^2x^2} - 4h^4x^2e^{-h^2x^2}$. Теперь найдем значение x, при котором $f'(x) = 0$

$f'(x) = 2h^2e^{-h^2x^2}(1 - 2h^2x^2) = 0$, т. е. $f'(x) = 0$ только при $x = \frac{1}{h\sqrt{2}}$.

Так как $f'(x)$ меняется с “+” на “-“ при переходе через точку $x = \frac{1}{h\sqrt{2}}$, то данная точка является точкой максимума.

Значит, мода $d_x = \dfrac{1}{h\sqrt{2}}$.

Ответ: 1) $A = 2h^2$; 2) $M[X] = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2h}$; $D[X] = \dfrac{4-\pi}{4h^2}$; 3) медиана $x_{0,5} = \dfrac{\sqrt{\ln 2}}{h}$; 4) мода $d_x = \dfrac{1}{h\sqrt{2}}$.

1.4 ОСНОВНЫЕ ТИПЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Непрерывная случайная величина X называется ***распределенной равномерно*** на отрезке [a,b] (обозначается R(a,b)), если ее плотность распределения постоянна на данном отрезке и равна 0 вне его, т. е.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a, b], \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a, b]. \end{cases} \qquad (23)$$

Функция равномерного распределения представляет собой отрезок прямой, проходящей через 2 точки с координатами (a,0) и (b,1) и имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если } a < x \le b, \\ 1, & \text{если } x > b. \end{cases} \qquad (24)$$

Известно, что для равномерно распределенной случайной величины ее математическое ожидание $m_x = \dfrac{b+a}{2}$, дисперсия $D_x = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Непрерывная случайная величина X называется распределенной по ***показательному (экспоненциальному)*** закону (обозначается $E_x(\lambda)$), если плотность ее распределения имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0. \end{cases} \qquad (25)$$

где $\lambda > 0$ - параметр распределения.

Функция показательного распределения имеет следующий вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0. \end{cases} \qquad (26)$$

Для показательного распределения $m_x = \dfrac{1}{\lambda}$, $D_x = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Показательное распределение широко используется для расчета надежности различных систем (радиотехнических, электрических, механических и т. п.). Под надежностью понимается способность системы не отказывать в работе. Оказывается, время безотказной работы системы со случайными отказами имеет показательный закон распределения.

Непрерывная случайная величина X называется распределенной по ***нормальному*** (гауссовскому) закону (обозначается $N(m,\sigma)$) с параметрами m и $\sigma > 0$, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (27)$$

Параметры m и σ совпадают с основными характеристиками распределения.

Для нормально распределенной случайной величины X вероятность ее попадания в интервал (x_1, x_2) вычисляется по следующей формуле:

$$P(x_1 < X < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - m}{\sigma}\right), \qquad (28)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ - функция Лапласа, которая является табулированной. Следует помнить, что функция $\Phi(x)$ нечетна, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Пример 1.14. Автобусы идут с интервалом 5 минут. Считая, что случайная величина X – время ожидания автобуса на остановке распределена равномерно на указанном интервале, найти 1) среднее время ожидания и дисперсию времени ожидания; 2) вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 минут.

Решение. Из условия известно, что X – время ожидания автобуса на остановке. Поскольку автобусы идут с интервалом в 5 минут, следовательно, время ожидания автобуса может составить от 0 до 5 минут и все моменты равновозможны. Значит X – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке [0,5]. Тогда ее плотность распределения, согласно (23), примет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \mathrm{x} \notin [0,5], \\ \frac{1}{5}, & \mathrm{x} \in [0,5]. \end{cases}$$

Теперь, когда определена плотность *f(x),* можно найти математическое ожидание и дисперсию.

$$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx=\frac{1}{5}\int_0^5 xdx=\frac{1}{5}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^5=\frac{5}{2}.$$

$$D[X]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2\cdot f(x)dx=\int_0^5\left(x-\frac{5}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{5}dx=\frac{1}{5}\int_0^5\left(x^2-\frac{10x}{2}+\frac{25}{4}\right)dx=\frac{1}{5}\int_0^5 x^2dx-$$

$$-\int_0^5 xdx+\int_0^5\frac{5}{4}dx=\frac{25}{12}.$$

Для того, чтобы найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 минут, воспользуемся 4-м свойством плотности вероятности. Т. е. вероятность попадания случайной величины в интервал:

$$P(a\le X<b)=\int_a^b f(x)dx=P(0\le X<3)=\int_0^3\frac{1}{5}dx=\frac{3}{5}.$$

Ответ: 1) *M[X]=5/2; D[X]=25/12;* 2) $P(0\le X<3)=3/5$.

Пример 1.15. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному плотностью вероятности $f(x)=\begin{cases}0, & \mathrm{x}<0,\\ 3e^{-3x}, & \mathrm{x}\ge 0.\end{cases}$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадет в интервал (0,13; 0,7).

Решение. Вероятность попадания случайной величины в интервал (0,13; 0,7) будем искать по формуле $P(a<X<b)=F(b)-F(a)$. Из условия задачи получим, что функция распределения для данного показательного закона имеет следующий вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, \ \mathrm{x}\le 0;\\ 1-\mathrm{e}^{-3\mathrm{x}}, \ \mathrm{x}\ge 0.\end{cases}$$

Учитывая, что по условию a=0,13, b=0,7, получим

$$P(0{,}13<X<0{,}7)=1-e^{-3\cdot 0{,}7}-1+e^{-3\cdot 0{,}13}=e^{-0{,}39}-e^{-2{,}1}\approx 0{,}677-0{,}122\approx 0{,}555.$$

Пример 1.16. Средняя квадратическая ошибка высотометра составляет 15 м. Какова вероятность того, что самолет уклонится от расчетной высоты не более чем на 20 м.

Решение. Пусть X – ошибка высотометра. Известно, что ошибки измерений подчиняются нормальному закону, поэтому X имеет нормальный закон распределения с плотностью распределения (27), где $m=0$ м, $\sigma=15$ м. Согласно условию следует определить вероятность события $P(-20\,м<X<20\,м)$. Вероятность этого события находим по формуле (28). Получаем

$$P(-20\,м < X < 20\,м) = \Phi\left(\frac{20}{15}\right) - \Phi\left(\frac{-20}{15}\right) = 2\Phi(1{,}33) \approx 0{,}816.$$

Задачи для самостоятельной работы

1.29. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0,2), \\ \frac{1}{2}x, & x \in (0,2). \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

1.30. Случайная величина X задана плотностью вероятности (распределение Лапласа) $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad x \in R$. Найти математическое ожидание и срединное отклонение случайной величины X.

1.31. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0,1), \\ c(x^2 + 2x), & x \in (0,1). \end{cases}$$

Найти: а) параметр с; б) математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

1.32. Функция распределения случайного времени безотказной работы радиоаппаратуры имеет вид (экспоненциальный закон распределения) $F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$ (*t≥0*). Найти: а) вероятность безотказной работы аппаратуры в течение времени Т, б) плотность вероятности *f(t)*.

1.33. Функция распределения Вейбула $F(x) = 1 - e^{-\frac{x^m}{x_0}}$ (*x≥0*) в ряде случаев характеризует срок службы элементов электронной аппаратуры. Найти: а) плотность вероятности *f(x)*; б) квантиль распределения порядка *p*; в) моду распределения.

1.34. Случайная величина эксцентриситета детали характеризуется функцией распределения Рэлея $F(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ (*x≥0*). Найти: а) плотность вероятности f(x); б) медиану распределения; в) моду распределения.

1.35. Случайная величина X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (2;4), \\ -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - 6, & x \in (2;4). \end{cases}$$

Найти: а) моду; б) медиану; в) математическое ожидание случайной величины X.

1.36. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(-1;1),\\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & x\in(-1;1).\end{cases}$$

Найти: а) моду; б) медиану X; в) дисперсию X.

1.37. Функция распределения случайной величины X имеет вид (закон арксинуса)

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le -1,\\ a+b\arcsin x, & \text{при } -1\le x\le 1,\\ 1, & \text{при } x\ge 1.\end{cases}$$

Определить постоянные a и b. Найти M[X] и D[X].

1.38. Случайная величина X распределена по закону, определяемому функцией распределения вида:

$$F(x)=\begin{cases}0, & |x|>\pi/2,\\ c\cdot\cos x, & -\pi/2\le x\le \pi/2.\end{cases}$$

Найти: а) константу *c*, 2) вычислить $P\{|X|<\pi/4\}$, 3) M[X], D[X]; 4) квантилью какого порядка является точка $x=\pi/4$.

1.39. Функция распределения случайной величины X задана в виде

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0,\\ x^2/4, & \text{если } 0<x\le 2,\\ 1, & \text{если } x>2.\end{cases}$$

Вычислить P{X≥ 1}, M[X] и D[X].

1.40. Случайная величина X распределена по закону Коши

$$f(x)=\frac{a}{1+x^2}.$$

Найти 1) коэффициент a, 2) функцию распределения F(x), 3) вероятность попадания величины X на участок (-1,1).

1.41. Случайная величина X имеет плотность распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0, & |x|>\pi/2,\\ \dfrac{2}{\pi}\cdot\cos^2 x, & -\pi/2\le x\le \pi/2.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

1.42. Плотность вероятности случайной величины X выглядит следующим образом

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}x^2, & |x|\le h,\\ 0, & |x|>h.\end{cases}$$

Найти h, F(X), M[X], D[X].

1.43. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(0,1)\\ 2x, & x\in(0,1)\end{cases}$$

Найти начальные и центральные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков.

1.44. Найти математическое ожидание случайной величины X, распределенной равномерно в интервале (2:8).

1.45. Равномерно распределенная случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & |\mathrm{x}-\mathrm{a}|>\mathrm{l}\\ \dfrac{1}{2l}, & |\mathrm{x}-\mathrm{a}|\le \mathrm{l}\end{cases}$$

Определить: а) M[X]; б) D[X]; в) найти связь между средним квадратическим отклонением и срединным отклонениями случайной величины X.

1.46. Случайная величина X распределена по закону R(0,a) и известно, что P{X>1/3}=1/3. Найти коэффициент a и $M[X^2]$.

1.47. Если соблюдается график движения, то среднее время ожидания пассажиром трамвая равно 3,5 минуты. Известно, что время ожидания имеет равномерный закон распределения. Минимальное время ожидания равно 0. Найти вероятность того, что пассажир будет ожидать трамвай от двух до пяти минут.

1.48. Найти p квантиль распределения *R(a,b)*.

1.49. Автобусы идут с интервалом 7 минут. Считая, что случайная величина X – время ожидания автобуса на остановке – распределена равномерно на указанном интервале, найти 1) среднее время ожидания и дисперсию времени ожидания; б) вероятность того, что время ожидания автобуса превысит 5 минут.

1.50. Время ремонта и обслуживания автомобиля после одной поездки случайно и имеет экспоненциальный закон распределения. Было замечено, что в текущем сезоне на ремонт и обслуживание автомобиля после одной поездки тратилось в среднем 5 минут. Найти вероятность того, что при очередной поездке это время не превысит 30 минут.

1.51. Найти p квантиль экспоненциального закона распределения с параметром λ.

1.52. Известно, что среднее время ожидания очередного покупателя, подошедшего к кассе, равно 0,2 минуты. Время ожидания кассиром очередного покупателя можно считать случайной величиной, имеющей показательный закон распределения. Кассиру нужно сменить ленту кассового аппарата. На это ему требуется две минуты. Какова вероятность того, что за это время не образуется очередь.

1.53. Время ожидания в очереди имеет показательный закон распределения со средним временем ожидания 20 мин. Какова вероятность того, что покупатель потратит на покупку не менее 10 и не более15 мин.

1.54. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0, \\ 1 - e^{--0,6x}, \ x \geq 0. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X попадет в интервал (2:5).

1.55. Производится измерение без систематических ошибок диаметра вала. Случайные ошибки измерения X подчиняются нормальному распределению со стандартным отклонением 10 мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15 мм.

1.56. Измерение дальности до объекта сопровождается систематическими и случайными ошибками. Систематическая ошибка равна 50м в сторону занижения дальности. Случайные ошибки подчиняются нормальному закону со средним квадратичным отклонением 100м. Найти 1) вероятность измерения дальности с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 150м; 2) вероятность того, что измеренная дальность не превзойдет истинной.

1.57. Какова вероятность того, что ошибка измерения X не превзойдет по абсолютной величине 5 м, если m=5 м, а $\sigma = 75$м.

1.58. Независимые случайные величины X_1 и X_2 распределены нормально с параметрами $\sigma_1 = \sigma_2 = 20$м, $m_1 = 5$м, $m_2 = -5$. Какова вероятность того, что хотя бы одна из них по абсолютной величине не превзойдет 15 м.

1.59. Случайное отклонение размера детали от номинала при изготовлении ее на данном станке имеет нулевое математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение, равное 5 мм. Сколько необходимо изготовить деталей, чтобы с вероятностью не менее 0,9 среди них была хотя бы одна годная, если для годной детали допустимо отклонение размера от номинала не более, чем на 2 мм.

2. Системы случайных величин

Совокупность двух случайных величин (X,Y), рассматриваемых совместно, называется системой двух случайных величин или двумерным случайным вектором. Систему двух случайных величин можно рассматривать как случайную точку M(X,Y) на плоскости xOy.

Функцией распределения вероятностей двумерной случайной величины называют функцию $F(x,y)$, определяющую для каждой пары чисел *(x,y)* вероятность того, что *X* примет значение, меньшее *x*, и при этом *Y* примет значение, меньшее *y*:

$$F(x,y) = P(X < x, Y < y).$$

Геометрически это равенство можно истолковать так: $F(x,y)$ есть вероятность того, что случайная точка (X,Y) попадет в бесконечный квадрант с вершиной *(x,y)*, расположенный левее и ниже этой вершины.

Функция распределения обладает следующими свойствами:

1. Значения функции распределения удовлетворяют двойному неравенству

$$0 \le F(x,y) \le 1.$$

2. Функция распределения есть неубывающая функция по каждому аргументу:

$$F(x_2, y) \ge F(x_1, y), \text{если } x_2 > x_1,$$

$$F(x, y_2) \ge F(x, y_1), \text{если } y_2 > y_1.$$

3. Имеют место предельные соотношения:

$$\lim_{\substack{x\to-\infty \\ y\to-\infty}} F(x,y) = 0, \quad \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} F(x,y) = 1.$$

4. а) При $y \to \infty$ функция распределения системы становится функцией распределения составляющей X:

$$\lim_{y\to\infty} F(x,y) = F_1(x).$$

б) при $x \to \infty$ функция распределения системы становится функцией распределения составляющей Y:

$$\lim_{x\to\infty} F(x,y) = F_2(y)$$

5. Для системы независимых случайных величин их функция совместного распределения $F(x,y)$ и функции распределения компонент $F_1(x)$, $F_2(y)$ связаны соотношением

$$F(x,y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$$

Дискретная двумерная случайная величина X может быть задана законом распределения или функцией распределения *F(x,y).*

Законом распределения дискретной двумерной случайной величины называют перечень возможных значений этой величины, т. е. пар чисел (x_i, y_j) и их вероятностей $p(x_i, y_j)$ $(i=1, 2,.., n;\ j=1, 2,.., m)$. Обычно закон распределения задают в виде таблицы с двойным входом, содержащей возможные значения и их вероятности. Т. к. события ($X=x_i$, $Y=y_j$) образуют полную группу событий, то $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) = 1$.

По закону распределения двумерной случайной величины можно найти законы распределения каждой из составляющих

$$\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) = p(x_i) = P\{X = x_i\}, \tag{29}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_j) = p(y_j) = P\{Y = y_j\}. \tag{30}$$

Законы (29) и (30) называют маргинальными законами первоначального двумерного распределения.

Непрерывную двумерную случайную величину можно задать либо с помощью функции распределения $F(x, y)$, либо с помощью плотности распределения $f(x, y)$.

Плотностью совместного распределения вероятностей непрерывной двумерной случайной величины называют вторую смешанную производную от функции распределения:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}. \tag{31}$$

Предполагается, что функция распределения $F(x, y)$ всюду непрерывна и имеет всюду непрерывную частную производную второго порядка.

Плотность совместного распределения $f(x, y)$ обладает следующими свойствами:

1. $f(x, y) \geq 0$.
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy = 1$.
3. Зная плотность распределения, можно найти функцию распределения по формуле:

$$F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{-\infty}^{x} f(t, z)dtdz. \tag{32}$$

4. Вероятность попадания случайной точки (X,Y) в область D определяется равенством

$$P((X, Y) \in D) = \iint\limits_{D} f(x, y)dxdy$$

5. Плотности распределения компонент X, Y, входящих в систему (X, Y), выражаются через плотность совместного распределения системы формулами:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = f_1(x), \tag{33}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = f_2(y). \tag{34}$$

6. Для независимых случайных величин плотность совместного распределения $f(x,y)$ и плотности распределения компонент $f_1(x)$, $f_2(y)$ связаны соотношением

$$f(x,y) = f_1(x) f_2(y).$$

Для двумерного случайного вектора (X,Y) вводятся следующие числовые характеристики.

1. Математическое ожидание системы (X,Y) определяется формулой:

$$M[XY] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j\, p(x_i, y_j), \quad \text{если}\,(X,Y) - \text{дискр. сл. вел.} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy, \text{если}\,(X,Y) - \text{непр. сл. вел.} \end{cases} \tag{35}$$

2. Дисперсия системы (X,Y) определяется формулой:

$$D[XY] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (x_i - m_x)^2 (y_j - m_y)^2\, p(x_i, y_j), \text{если}\,(X,Y) - \text{дискр. сл. вел.} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 (y - m_y)^2 f(x,y)dxdy, \quad \text{если}\,(X,Y) - \text{непр. сл. вел.} \end{cases} \tag{36}$$

3. Среднеквадратическое отклонение

$$\sigma_{XY} = +\sqrt{D_{Xy}}$$

4. Начальный момент порядка k+s случайного вектора (X,Y)

$\alpha_{ks} = M[X^k Y^s]$. В частности $\alpha_{10} = M[X]$, $\alpha_{01} = M[Y]$.

5. Центральный момент порядка k+s случайного вектора (X,Y)

$\mu_{ks} = M[(X - M[X])^k (Y - M[Y])^s]$. В частности $\mu_{20} = D[X]$, $\mu_{02} = D[Y]$.

6. Коэффициентом ковариации или корреляционным моментом системы (X,Y) называют центральный момент μ_{11} порядка 1+1:

$$\mu_{11} = K_{XY} = M[(X - M[X])(Y - M[Y])] = M[XY] - M[X]M[Y]. \tag{37}$$

7. Коэффициентом корреляции величин X и Y называют отношение корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений этих величин:

$$r_{XY} = \rho_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}, \tag{38}$$

в которой $\sigma_x = \sqrt{D[X]}$, $\sigma_y = \sqrt{D[Y]}$.

Коэффициент корреляции характеризует степень тесноты зависимости между случайными величинами. Для любых двух случайных величин $|\rho_{XY}| \le 1$. Если случайные величины независимы, то $r_{xy} = 0$; если случайные величины связаны линейной зависимостью, то $r_{xy} = \pm 1$.

Пример 2.1. Задано совместное распределение системы случайных величин (X,Y)

x_i / y_j	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

Найти: 1) законы распределения компонент X и Y; 2) вычислить вероятности $P\{X \ge 10, Y = 5\}$ и $P\{X > Y\}$; 3) найти M[X], M[Y]; 4) составить матрицу ковариаций K_{XY}.

Решение. 1) найдем законы распределения компонент X и Y.

Сложив вероятности «по столбцам» в исходной таблице, получим вероятности возможных значений X:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=3) = 0{,}17 + 0{,}10 = 0{,}27,$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=10) = 0{,}13 + 0{,}30 = 0{,}43,$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=12) = 0{,}25 + 0{,}05 = 0{,}30.$$

Напишем закон распределения составляющей X:

X	3	10	12
p	0,27	0,43	0,30

Сложив вероятности «по строкам», аналогично найдем распределение составляющей *Y*:

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y}=4) = 0{,}17 + 0{,}13 + 0{,}25 = 0{,}55,$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y}=5) = 0{,}10 + 0{,}30 + 0{,}05 = 0{,}45,$$

Напишем закон распределения составляющей *Y*

Y	4	5
p	0,55	0,45

2) найдем вероятности $P\{X \ge 10, Y = 5\}$ и $P\{X > Y\}$.

$$P\{X \ge 10, Y = 5\} = p(x_2, y_2) + p(x_3, y_2) = 0{,}30 + 0{,}05 = 0{,}35$$

$$P\{X > Y\} = p(x_2, y_1) + p(x_2, y_2) + p(x_3, y_1) + p(x_3, y_2) =$$

$$= 0{,}13 + 0{,}30 + 0{,}25 + 0{,}05 = 0{,}73.$$

3) найдем математические ожидания и дисперсии компонент X и Y.

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 3 \cdot 0{,}27 + 10 \cdot 0{,}43 + 12 \cdot 0{,}3 = 8{,}71,$$

$$M[Y]=\sum_{j=1}^{m} y_j p_j = 4\cdot 0{,}55+5\cdot 0{,}45=4{,}45,$$

$$D[X]=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - (M[X])^2 = 3^2\cdot 0{,}27+10^2\cdot 0{,}43+12^2\cdot 0{,}30-(8{,}71)^2 \approx 12{,}77,$$

$$D[Y]=\sum_{j=1}^{m} x_j^2 p_j - (M[Y])^2 = 4^2\cdot 0{,}55+5^2\cdot 0{,}45-(4{,}45)^2 = 0{,}2475.$$

3) для того чтобы составить матрицу ковариаций, сначала необходимо найти коэффициент ковариации K_{XY} по формуле (37)

$K_{XY}=M[XY]-M[X]M[Y]$, а M[XY] найдем по формуле (35):

$$M[XY]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p(x_i, y_j) = 3\cdot 4\cdot 0{,}17+10\cdot 4\cdot 0{,}13+12\cdot 4\cdot 0{,}25+5\cdot 3\cdot 0{,}1+$$

$$+5\cdot 10\cdot 0{,}3+5\cdot 12\cdot 0{,}05=38{,}74,$$

$$K_{XY}=M[XY]-M[X]M[Y]=38{,}74-8{,}71\cdot 4{,}45\approx -0{,}02.$$

Теперь построим матрицу ковариаций

$$K_{xy}=\begin{Vmatrix} 12{,}77 & -0{,}02 \\ -0{,}02 & 0{,}2475 \end{Vmatrix}$$

Очевидно, что матрица ковариаций является симметричной матрицей ($K_{XY}=K_{YX}$), по диагонали которой стоят дисперсии случайных величин X и Y.

Пример 2.2. Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y).

$$f(x,y)=\begin{cases} 4xye^{-x^2-y^2}, (x>0, y>0), \\ 0,\ (x<0 \text{ или } y<0). \end{cases}$$

Найти математические ожидания и дисперсии составляющих X и Y.

Решение. Математические ожидания и дисперсии составляющих X и Y можно найти двумя способами. Рассмотрим их.

1-й способ. Найдем сначала плотности распределения составляющих X и Y по формулам (33), (34).

$$f_1(x)=\int_0^{\infty} f(x,y)dy=\int_0^{\infty} 4xye^{-\div^2-y^2}dy=4xe^{-x^2}\int_0^{\infty} ye^{-y^2}dy=2xe^{-x^2} \quad (x>0)$$

Аналогично получим

$$f_2(y)=\int_0^{\infty} f(x,y)dx=2ye^{-y^2} \quad (y>0).$$

После того, как нашли плотности распределения составляющих X и Y, можно найти математическое ожидание составляющей X по формуле (14):

$$M[X]=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf_1(x)dx=\int\limits_{0}^{\infty} x\cdot(2xe^{-x^2})dx=2\int\limits_{0}^{\infty} x^2e^{-x^2}dx=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Для вычисления интеграла использовались формулы (19) и (20).

Очевидно, что $M[Y]=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Дисперсию составляющей X найдем по следующей формуле:

$$D[X]=\int\limits_{0}^{\infty} x^2 f_1(x)-\left(M[X]\right)^2=\int\limits_{0}^{\infty} x^2(2xe^{-x^2})dx-\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2=2\int\limits_{0}^{\infty} x^3e^{-x^2}-\frac{\pi}{4}=$$

$$=\Gamma(1)-\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}.$$

Очевидно, что $D[Y]=1-\frac{\pi}{4}$

2-й способ. Для того чтобы вычислить математическое ожидание и дисперсию иногда удобнее использовать формулы, содержащие двумерную плотность вероятности без необходимости отыскания плотностей распределения составляющих X и Y .

Для нахождения математического ожидания составляющей X воспользуемся формулой:

$$M[X]=\int\int xf(x,y)dxdy.$$

$$M[X]=\int\int xf(x,y)dxdy=\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} x\cdot 4xye^{-x^2-y^2}dxdy=\int\limits_{0}^{\infty} 2x^2e^{-x^2}dx\int\limits_{0}^{\infty} 2ye^{-y^2}dy=$$

$$=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Для нахождения дисперсии составляющей X воспользуемся формулой:

$$D[X]=\int\int (x-M[x])^2 f(x,y)dxdy$$

или формулой

$$D[X]=\int\int x^2 f(x,y)dxdy-\left(M[X]\right)^2.$$

$$D[X]=\int\int x^2 f(x,y)dxdy-\left(M[X]\right)^2=\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} x^2\cdot 4xye^{-x^2-y^2}dxdy-\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2=$$

$$=\int\limits_{0}^{\infty} 2x^3e^{-x^2}dx\int\limits_{0}^{\infty} 2ye^{-y^2}dy-\frac{\pi}{4}=\Gamma(1)\cdot 2\cdot\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $M[X]=M[Y]=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $D[X]=D[Y]=1-\frac{\pi}{4}$

Задачи для самостоятельной работы

2.1. Закон распределения системы случайных величин (X,Y) определяется следующей таблицей:

$x_i \diagup y_j$	0	1
0	1/8	0
1	1/4	1/8
2	1/8	3/8

Найти безусловные закон распределения отдельных компонент X и Y.

2.2. Система случайных величин (X,Y) имеет плотность вероятности

$$f(x,y)=\frac{C}{\pi^2(16+x^2)(25+y^2)}.$$

Требуется: а) определить величину С; б) найти функцию распределения *F(x,y)*.

2.3. Плотность распределения системы случайных величин (X,Y) имеет следующий вид

$$f(x,y)=\begin{cases} c(x+y), x\in[0;], \mathrm{y}\in[0;1], \\ 0, x\notin[0;1], \mathrm{y}\notin[0;1]. \end{cases}.$$

Определить константу *c, f(x), f(y), M[X], M[Y]*.

2.4. Дана ковариационная матрица системы случайных величин (X,Y,Z):

$$K_{xyz}=\begin{Vmatrix} 16 & -14 & 12 \\ -14 & 49 & -21 \\ 12 & -21 & 36 \end{Vmatrix}$$

Найти коэффициенты корреляции и построить матрицу $\|\rho_{xyz}\|$.

2.5. Заданы плотности распределения независимых составляющих непрерывной двумерной случайной величины (X,Y):

$$f(x)=\begin{cases} 5e^{-5x}, \text{при } x>0, \\ 0, \text{ при } x<0; \end{cases} \quad f(y)=\begin{cases} 2e^{-2y}, \text{при } y>0, \\ 0, \text{ при } y<0. \end{cases}$$

Найти: а) плотность совместного распределения системы; б) функцию распределения системы.

2.6. Закон распределения системы случайных величин (X,Y) определяется следующей таблицей:

$x_i \diagup y_j$	-1	0	1
1	0,15	0,3	0,35
2	0,05	0,05	0,1

Найти: а) безусловные закон распределения отдельных компонент X и Y; б) вычислить вероятности P{X=2,Y≥0} и P{X>Y}; в) M[X], M[Y]; г) ковариационную матрицу.

2.7. Задана функция распределения двумерной случайной величины:

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-4x})(1-e^{-2y}),\ x>0,\ \text{y}>0,\\ 0,\ x<0,\ \text{y}<0.\end{cases}$$

Найти двумерную плотность вероятности системы (X,Y).

2.8. Плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины (X,Y) имеет следующий вид

$$f(x,y)=\begin{cases}c(xy+y^2) & \textit{при}\ \ 0\le x\le 2,\ \ 0\le y\le 2,\\ 0, & \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Вычислить коэффициент c и математические ожидания составляющих.

2.9. Система X,Y задана следующей двумерной таблицей распределения вероятностей.

x_i / y_j	0	1	2	3	4	5	6
0	0,202	0,174	0,113	0,062	0,049	0,023	0,004
1	0	0,099	0,064	0,040	0,031	0,020	0,006
2	0	0	0,031	0,025	0,018	0,013	0,008
3	0	0	0	0,001	0,002	0,004	0,011

Требуется: а) определить вероятность P(Y≥2); б) M[X], M[Y] и корреляционную матрицу.

2.10. Определить математические ожидания и корреляционную матрицу системы случайных величин (X,Y), если плотность вероятности

$$f(x,y)=\frac{2}{\pi^2(x^2+y^2+1)^3}\,.$$

2.11. Определить плотность вероятности, математические ожидания и ковариационную матрицу системы случайных величин (X,Y), если функция распределения системы имеет вид:

$$F(x,y)=\begin{cases}\sin x\sin y & \textit{при}\ \ 0\le x\le \pi/2,\ \ 0\le y\le \pi/2,\\ 0, & \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$$

2.12. Задана плотность совместного распределения двумерной случайной величины (X,Y)

$$f(x,y)=\begin{cases}36xye^{-(x^2+y^2)}, (x>0, y>0),\\ 0,\ (x<0 \text{ или } y<0).\end{cases}$$

Найти математические ожидания и дисперсии составляющих.

2.13. Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}\sin x \sin y, \quad x,y\in(0,\pi),\\ 0,\ \ при\ \ x,y\notin(0,\pi).\end{cases}$$

Найти математические ожидания и дисперсии составляющих.

2.14. Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайных величин (X,Y):

$$f(x,y)=\begin{cases}c\cdot\sin(x+y), \quad x,y\in(0,\pi/2),\\ 0, \quad x,y\notin(0,\pi/2).\end{cases}.$$

Найти коэффициент с, математические ожидания и дисперсии составляющих.

3. Функции случайных величин

Если каждому возможному значению случайной величины *X* соответствует единственное значение случайной величины *Y*, то *Y* называют функцией случайного аргумента X и записывают $Y=\varphi(X)$. При этом функция $Y=\varphi(X)$ является обычной числовой функцией, определенной на множестве возможных значений случайной величины X.

1. Если *X* – ***дискретная*** случайная величина и функция $Y=\varphi(X)$ ***монотонна***, то различным значениям *X* соответствуют различные значения *Y*, причем вероятности соответствующих значений *X* и *Y* одинаковы. Другими словами, возможные значения *Y* находят из равенства

$$y_i=\varphi(x_i), \tag{39}$$

где x_i - возможные значения *X*; вероятности возможных значений *Y* находят из равенства $P(Y=y_i)=P(X=x_i)$.

Если же $Y=\varphi(X)$ - ***немонотонная*** функция, то различным значениями *X* могут соответствовать одинаковые значения *Y*. В этом случае для отыскания вероятностей возможных значений *Y* следует сложить вероятности тех возможных значений X, при которых Y принимает одинаковые значения.

Математическое ожидание дискретной случайной величины *Y* определяется следующим образом:

$$m_Y = M[\varphi(X)] = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i \ , \qquad (40)$$

а дисперсия выражается любой из двух формул

$$D_Y = D[\varphi(X)] = \sum_{i=1}^{n} [\varphi(x_i) - m_Y]^2 \, p_i \ , \qquad (41)$$

$$D_Y = D[\varphi(X)] = \sum_{i=1}^{n} [\varphi(x_i)]^2 p_i - m_Y^2 \ . \qquad (42)$$

2. Если X – ***непрерывная*** случайная величина с плотностью распределения $f(x)$ и если $Y = \varphi(X)$ - дифференцируема и строго ***монотонна,*** то плотность распределения $g(y)$ случайной величины Y находится по формуле:

$$g(y) = f(\psi(y)) \, | \psi'(y) | , \qquad (43)$$

где $X = \psi(Y)$ - обратная функция к $Y = \varphi(X)$

Если функция $Y = \varphi(X)$ - ***не монотонна*** в интервале возможных значений *X*, то следует разбить этот интервал на такие интервалы, в которых функция $\varphi(x)$ монотонна, а затем представить плотность $g(y)$ в виде суммы:

$$g(y) = \sum_{i=1}^{k} f(\psi_i(y)) \left| \psi_i'(y) \right| , \qquad (44)$$

где k – число интервалов монотонности, $x = \psi_i(y)$ - функция, обратная к $y = \varphi(x)$ на *i*-ом интервале монотонности (*i=1,2,,k*).

Математическое ожидание непрерывной случайной величины *Y* определяется следующим образом:

$$m_Y = M[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx , \qquad (45)$$

а дисперсия выражается любой из двух формул

$$D_Y = D[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x) - m_Y]^2 \, f(x) dx , \qquad (46)$$

$$D_Y = D\big[\varphi(X)\big] = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x)]^2 \, f(x) dx - m_y^2 . \qquad (47)$$

Справедливы следующие свойства математического ожидания и дисперсии:

1. Если *c* – не случайная величина, то

$$M[c]=c, \; D[c]=0$$

2. Если *c* – не случайная величина, а *X* – случайная величина, то

$$M[cX]=cM[x], \; D[cX]=c^2D[x].$$

3. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M[X+Y]=M[X]+M[Y]$$

и вообще

$$M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} M[X_i]$$

4. Математическое ожидание линейной функции случайных величин $X_1,...,X_n$ равно той же линейной функции от математического ожидания этих случайных величин:

$$M\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right]=\sum_{i=1}^{n} a_i M[X_i]+b,$$

где a_i и b – не случайные коэффициенты.

5. Дисперсия суммы двух случайных величин выражается формулой:

$$D[X+Y]=D[X]+D[Y]+2K_{xy}.$$

Дисперсия суммы нескольких случайных величин выражается формулой

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} D[X_i]+2\sum_{i<j} K_{x_i x_j}$$

Дисперсия суммы двух некоррелированных случайных величин X и Y равна сумме их дисперсий

$$D[X+Y]=D[X]+D[Y]$$

и вообще, для некоррелированных случайных величин $X_1,...,X_n$

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} D[X_i]$$

6. Дисперсия линейной функции случайных величин $X_1,...,X_n$, где a_i и b – не случайные коэффициенты, выражается формулой

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right]=\sum_{i=1}^{n} a_i^2 D[X_i]+2\sum_{i<j}^{n} a_i a_j K_{x_i x_j}$$

7. Математическое ожидание произведения двух случайных величин X и Y выражается формулой

$$M[XY] = M[X]M[Y] + K_{xy}$$

Математическое ожидание произведения двух некоррелированных случайных величин X и Y равно произведению их математических ожиданий:

$$M[XY] = M[X]M[Y]$$

Если $X_1,...,X_n$ - независимые случайные величины, то математическое ожидание равно произведению математических ожиданий

$$M\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right]=\prod_{i=1}^{n} M[X_i]$$

8. Если X и Y независимы, то дисперсия произведения двух случайных величин выражается формулой

$$D[XY]=D[X]D[Y]+m_x^2D[Y]+m_y^2D[X]$$

Пример 3.1. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	3	6	10
p	0,2	0,1	0,7

Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y, если известно, что Y=2X+1 .

Решение. Сначала по формуле (39) найдем возможные значения величины Y=2X+1. Имеем $y_1 = 2\cdot 3 + 1 = 7$; $y_2 = 2\cdot 6 + 1 = 13$; $y_3 = 2\cdot 10 + 1 = 21$. Т.к. функция $y = \varphi(x) = 2x + 1$ монотонна, то вероятности, с которыми Y принимает свои значения: 7, 13, 21 равны вероятностям, с которыми X принимает свои значения: 3, 6, 10 соответственно. Значит, $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}1$, $p_3 = 0{,}7$. Выписываем закон распределения для случайной величины *Y*.

Y	7	13	21
p	0,2	0,1	0,7

Теперь найдем математическое ожидание случайной величины Y. Воспользуемся формулой (40):

$$m_Y = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)p_i = (2\cdot 3+1)\cdot 0{,}2 + (2\cdot 6+1)\cdot 0{,}1 + (2\cdot 10+1)\cdot 0{,}7 = 17{,}4.$$

Дисперсию найдем, воспользовавшись формулой (32):

$$D_Y = \sum_{i=1}^{n} [\varphi(x_i)]^2 p_i - m_Y^2 = (2\cdot 3+1)^2\cdot 0{,}2 + (2\cdot 6+1)^2\cdot 0{,}1 + (2\cdot 10+1)^2\cdot 0{,}7 -$$

$$-17{,}4^2 = 9{,}8 + 16{,}9 + 308{,}7 - 302{,}76 = 32{,}64.$$

Математическое ожидание и дисперсию случайной величины *Y* можно было найти и воспользовавшись формулами (1) и (2), воспользовавшись найденным законом распределения случайной величины *Y*.

Ответ: m_Y=17,4; D_Y=32,64.

Пример 3.2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	-1	-2	1	2
p	0,3	0,1	0,2	0,4

Найти закон распределения случайной величины $Y=X^2$.

Решение. Найдем возможные значения *Y*:

$y_1 = x_1^2 = (-1)^2 = 1,$

$y_2 = x_2^2 = (-2)^2 = 4,$

$y_3 = x_3^2 = 1^2 = 1,$

$y_4 = x_4^2 = 2^2 = 4.$

Итак, различным значениям X соответствуют одинаковые значения Y. Это объясняется тем, что возможные значения X принадлежат интервалу, на котором функция $Y=X^2$ не монотонна.

Найдем вероятности возможных значений Y.

$P(Y=1) = P(X=-1) + P(X=1) = 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}5,$

$P(Y=4) = P(X=-2) + P(X=2) = 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}5.$

Запишем искомый закон распределения величины Y:

Y	1	4
p	0,5	0,5

Пример 3.3. Случайная величина X распределена равномерно в интервале $(0;\pi/2)$. Найти плотность распределения *g(y)* случайной величины *Y=sinX*.

Решение. Найдем плотность распределения *f(x)* случайной величины *X*. Величина *X* распределена равномерно в интервале $(0;\pi/2)$, поэтому в этом интервале по формуле (23), получим:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}, x \in (0,\pi/2), \\ 0, \ x \notin (0,\pi/2). \end{cases}$$

Функция *Y=sinX* в интервале $(0,\pi/2)$ монотонна, следовательно в этом интервале она имеет обратную функцию $x=\psi(y)=\arcsin y$. Найдем производную $\psi'(y)$: $\psi'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Учитывая, что $f(x)=2/\pi$ (следовательно $f(\psi(y))=2/\pi$) по формуле (33) найдем искомую плотность распределения *g(y):*

$$g(y) = f(\psi(y))|\psi'(y)| = \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}.$$

Так как *y=sinx*, причем $0<x<\pi/2$, то $0<y<1$. Таким образом, имеем

$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, y \in (0,1), \\ 0, \qquad\qquad y \notin (0,1). \end{cases}$$

Проверим полученную плотность распределения вероятностей *g(y)* на условие нормировки $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, имеем:

$$\int_0^1 \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}dy = \frac{2}{\pi}\arcsin y \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 1.$$

Т. е. условие нормировки выполняется, значит *g(y)* найдена правильно.

Ответ: $g(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, x \in (0{,}1), \\ 0, \qquad x \notin (0{,}1). \end{cases}$

Пример 3.4. Случайная величина X распределена равномерно в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$. Найти плотность распределения *g(y)* случайной величины *Y=cosX*.

Решение. Найдем плотность распределения *f(x)* случайной величины *X*. Величина *X* распределена равномерно в интервале $(-\pi/2; \pi/2)$, поэтому в этом интервале по формуле (23), получим:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, x \in (-\pi/2; \pi/2), \\ 0, \ x \notin (-\pi/2; \pi/2). \end{cases}$$

Из уравнения *y=cosx* найдем обратную функцию $x = \psi(y)$. Так как в интервале $(-\pi/2; \pi/2)$ функция *y=cosx* не монотонна, то разобьем этот интервал на интервалы $(-\pi/2; 0)$ и $(0; \pi/2)$, в которых функция *y=cosx* монотонна. В интервале $(-\pi/2,;0)$ обратная функция имеет вид $\psi_1(y) = -\arccos y$; в интервале $(0; \pi/2)$ обратная функция $\psi_2(y) = \arccos y$. Искомая плотность распределения $g(y)$ в соответствии с (34), находится по формуле:

$$g(y) = f(\psi_1(y)) \cdot |\psi_1'(y)| + f(\psi_2(y)) \cdot |\psi_2'(y)|. \qquad (*)$$

Найдем производные обратных функций:

$$\psi_1'(y) = (-\arccos y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \ \psi_2'(y) = (\arccos y)' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Найдем модули производных:

$$|\psi_1'(y)| = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \ |\psi_2'(y)| = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}. \qquad (**)$$

Учитывая, что $f(x) = 1/\pi$, получим

$$f(\psi_1(y)) = 1/\pi, \ f(\psi_2(y)) = 1/\pi. \qquad (***)$$

Условия $\psi_1(y) \in (-\pi/2, 0)$, $\psi_2(y) \in (0, \pi/2)$ равносильны условию $y \in (0{,}1)$. Подставляя (**) и (***) в (*), получаем для $y \in (0{,}1)$

$$g(y)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}+\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}=\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}.$$

Если же $y\notin(0,1)$, то $g(y)=0$.

Ответ: $g(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & y\in(0,1),\\ 0, & y\notin(0,1).\end{cases}$.

Пример 3.5. Непрерывная случайная величина X распределена в интервале (0;1) по закону с плотностью

$$f(x)=\begin{cases}2x, & x\in(0,1),\\ 0, & x\notin(0,1).\end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y=X^2$.

Решение. Поскольку X – непрерывная случайная величина, для нахождения математического ожидания и дисперсии используем формулы (35) и (37). Имеем:

$$m_Y=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)dx=\int_0^1 x^2\cdot 2xdx=\frac{x^4}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2},$$

$$D_Y=\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x)]^2 f(x)dx-m_y^2=\int_0^1(x^2)^2 2xdx-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

Ответ: $m_Y=1/2$; $D_Y=1/12$.

Пример 3.6. Имеются две случайные величины X и Y, связанные соотношением $Y=2-3X$. Числовые характеристики величины X заданы $m_x=-1$; D[X]=4. Определить: а) математическое ожидание и дисперсию величины Y; б) корреляционный момент и коэффициент корреляции величин X и Y.

Решение. а) Воспользовавшись свойствами моментов 1 и 2, найдем M[Y] и D[Y].

$$\mathrm{M[Y]=M[2-3X]=2-3M[X]}=2+3=5.$$

$$\mathrm{D[Y]=D[2-3X]}=(-3)^2\cdot 4=36.$$

б) для нахождения K_{xy} и ρ_{xy} воспользуемся формулами (36) и (37)

$$K_{xy}=M[XY]-M[X]M[Y]=M[(X(2-3X)]-M[X]M[Y]=$$

$$=M[2X-3X^2]+5=2M[X]-3M[X^2]+5=-2+5-3(D[X]+m_x^2)=$$

$$=3-3(4+1)=-12.$$

Для нахождения M[X^2] использовалась формула (4).

$$\rho_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{-12}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{36}}=-1.$$

Пример 3.7. Случайные величины X и Y независимы и распределены X по закону R(0,2), Y- по закону N(1,2). Вычислить D[X-Y] и $M[XY^2+X^2Y]$.

Решение. Для решения задачи сначала необходимо найти M[X], M[Y], D[X], D[Y]. Известно, что случайная величина X распределена по закону R(0,2), т.е. по равномерному закону с параметрами a=0 и b=2.

$$m_x = \frac{b-a}{2} = 1,\ D_x = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{3}.$$

Случайная величина Y распределена по закону N(1,2), т. е. по нормальному закону с параметрами $\mathrm{m_y} = 1,\ \sigma_y = 2$, следовательно, D[Y]=4.

$D[X-Y]=D[X]+(-1)^2D[Y]=D[X]+D[Y]=1/3+4=13/3.$

$$M[XY^2 + X^2Y] = M[X]M[Y^2] + M[X^2]M[Y] = M[X]\left(D[X] + m_x^2\right) +$$

$$+\left(D[Y] + m_y^2\right)M[Y] = \left(\frac{1}{3} + 1\right) + (4+1) = \frac{4}{3} + 5 = \frac{19}{3}.$$

Пример 3.8. Случайная величина X распределена по закону N(-1,3); случайная величина Y равномерно в интервале (0,3); случайная величина Z – равномерно в интервале (-3,0). Нормированная корреляционная матрица случайных величин X, Y, Z имеет вид:

$$\rho_{ij} = \begin{Vmatrix} 1 & 0{,}5 & -0{,}2 \\ & 1 & 0{,}4 \\ & & 1 \end{Vmatrix}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $U = 1 - 2X + 3Y - Z$.

Решение.

Известно, что случайная величина X распределена по закону N(-1,3), т. е. по нормальному закону с параметрами $\mathrm{m_x} = -1,\ \sigma_x = 3$, следовательно, D[X]=9.

Случайная величина Y распределена по закону R(0,3), т. е. по равномерному закону с параметрами a=0 и b=3.

$$m_y = \frac{b+a}{2} = \frac{3}{2},\ D_y = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{3}{4}.$$

Случайная величина Z распределена по закону R(-3,0), т.е. по равномерному закону с параметрами a=-3 и b=0.

$$m_z = \frac{b+a}{2} = -\frac{3}{2},\ D_z = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{3}{4}.$$

Также из корреляционной матрицы видно, что

$r_{xy} = 0{,}5,\ r_{xz} = -0{,}2,\ r_{yz} = 0{,}4$

$$M[U] = M[1 - 2X + 3Y - Z] = 1 - 2M[X] + 3M[Y] - M[Z] = 1 + 2 + \frac{9}{2} + \frac{3}{2} = 9.$$

$$D[U]=D[1-2X+3Y-Z]=4D[X]+9D[Y]+D[Z]+2[(-2)\cdot 3\cdot k_{xy}+$$
$$(-2)\cdot(-1)\cdot k_{xz}+3\cdot(-1)\cdot k_{yz}]=36+9\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-12\cdot\sigma_x\sigma_y r_{xy}+4\cdot\sigma_x\sigma_z r_{xz}-$$
$$-6\cdot\sigma_y\sigma_z r_{yz}=43{,}5-18\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-2{,}4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1{,}8=41{,}7-10{,}2\sqrt{3}\approx 24{,}0.$$

Задачи для самостоятельной работы

3.1. Дискретная случайная величина X имеет ряд распределения

x_i	1	3	5
p_i	0,4	0,1	0,3

Найти закон распределения случайной величины Y=3X.

3.2. Дискретная случайная величина X имеет ряд распределения

x_i	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$
p_i	0,2	0,7	0,1

Найти закон распределения случайной величины Y=sinX.

3.3. Дискретная случайная величина X характеризуется рядом распределения

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Найти законы распределения случайных величин $Y=X^2+1$; Z=|X|.

3.4. Задана плотность случайной величины X

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x\in(-\pi/2,\ \pi/2),\\ 0, & x\notin(-\pi/2,\ \pi/2).\end{cases}$$

Найти плотность распределения *g(y)* случайной величины *Y=tgX*.

3.5. Случайная величина X распределена равномерно в интервале $(0;2\pi)$. Найти плотность распределения *g(y)* случайной величины Y=cosX.

3.6. Случайная величина X распределена равномерно в интервале $(-\pi/2;\pi/2)$. Найти плотность распределения *g(y)* случайной величины Y=cosX.

3.7. Задана плотность случайной величины X

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sin x, \text{ при } x\in(0,\pi),\\ 0, \text{ при } x\notin(0,\pi).\end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y=X^2$, определив предварительно плотность распределения *g(y)*.

3.8. Задана плотность случайной величины X

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, \text{ при } x\in(0,\pi/2),\\ 0, \text{ при } x\notin(0,\pi/2),\end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = X^2$.

3.9. Случайная величина X имеет плотность распределения $f(x)$. Найти плотность распределения случайной величины Y=|1-X|.

3.10. Случайная величина X имеет плотность распределения $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)$ при $x\in(-1;1)$. Найти плотность распределения случайной величины $Y=1-X^2$.

3.11. Задана плотность распределения случайной величины X

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},\ -\infty<x<+\infty.$$

Найти плотность распределения случайной величины Y=$\frac{1}{X}$.

3.12. Дискретная случайная величина X имеет ряд распределения

x_i	-1	0	1	2
p_i	0,2	0,1	0,3	0,4

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y=2^x$.

3.13. Непрерывная случайная величина распределена по закону

$$f(x)=\begin{cases}1/2\cos x, & \textit{при } x\in(-\pi/2;\pi/2),\\ 0, & \textit{при } x\notin(-\pi/2;\pi/2).\end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y=sinX.

3.14. Случайная величина X распределена с постоянной плотностью:

$$f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } x\in(1;2),\\ 0 \text{ при } x\notin(1;2).\end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y=1/X.

3.15. Случайная величина X распределена по закону R(0,a). Определить: а) *M[2X+3]*; б) $M[3X^2-2X+1]$; в) D[2X+3]; г) $D[X^2+1]$.

3.16. Случайная величина X распределена по тому же закону, что и в предыдущей задаче. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y=|sinX|. M[Y]=1/2, D[Y]=1/12.

3.17. На вход измерительного прибора поступает случайный вектор (X,Y) со следующими характеристиками m_x=-1, m_y=1, $\sigma_x=2$, $\sigma_y=3$, $\rho_{xy}=0{,}5$. На выходе прибора измеряется величина Z=(X-Y)^2. Определить математическое ожидание случайной величины Z. .

3.18. Случайные величины X и Y независимы и имеют следующие характеристики: $m_x=1$, $m_y=2$, $\sigma_x = 1$, $\sigma_y = 2$. Вычислить математические ожидания случайных величин $U = X^2 + 2Y^2 - XY - 4X + Y + 4$, $V = (X + Y - 1)^2$.

3.19. Двумерная случайная величина (X,Y) имеет следующее распределение вероятностей

x_i / y_j	0	1
-1	0,1	0,2
0	0,2	0,3
1	0	0,2

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = 2X + Y^2$.

3.20. Случайные величина X, Y зависимы и имеют следующие характеристики: $m_x = \frac{2}{3}a$, $m_y = \frac{1}{3}b$, $D_x = \frac{a^2}{18}$, $D_y = \frac{b^2}{18}$, $\rho_{xy} = -0{,}9$. Определить $M[X+Y]$, $D[3X\text{-}6Y+1]$, $M[XY]$.

3.21. Дискретная случайная величина X имеет распределение

x_i	-1	0	1
p_i	1/6	1/3	1/2

Найти коэффициент корреляции между X и X^2, т. е. ρ_{XX^2}.

3.22. Случайные величины X и Y независимы и распределены: X по закону R(0,2), Y – по закону N(1,2). Вычислить $D[X\text{-}Y]$ и $M[XY^2 + X^2Y]$.

3.23. Случайная величина X распределена по закону N(-1,2), а независимая от нее случайная величина Y распределена по закону R(-1,3). Вычислить $M[Z]$ и $D[Z]$, где $Z=X+Y-XY$.

ОТВЕТЫ

ОТВЕТЫ К РАЗДЕЛУ 1.

1.1.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,125	0,375	0,375	0,125

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ 0{,}125 & \text{при } 0 < x \le 1, \\ 0{,}500 & \text{при } 1 < x \le 2, \\ 0{,}875 & \text{при } 2 < x \le 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

1.2

x_i	0	1	2	3
p_i	1/6	1/2	3/10	1/30

M[X]=6/5, D[X]=14/25.

1.3.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,09	0,081	0,0729	0,6561

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1, \\ 0{,}1 & \text{при } 1 < x \le 2, \\ 0{,}19 & \text{при } 2 < x \le 3, \\ 0{,}271 & \text{при } 3 < x \le 4, \\ 0{,}3439 & \text{при } 4 < x \le 5, \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

1.4.

x_i	0	1	2
p_i	0,06	0,38	0,56

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ 0{,}06 & \text{при } 1 < x \le 2, \\ 0{,}44 & \text{при } 2 < x \le 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

M[X]=1,5.

1.5. M[X]=7,69, D[X]=8,545. **1.6.** M[X]=45/16, D[X]=167/265. P{X≥2}=15/16. **1.7.** p. **1.8.**

x_i	-1	0	1
p_i	0,2	0,3	0,5

M[X]=0,3, D[X]=0,61. **1.9.** P{X≥3,5}=1/2, P{|X|<2,5}=0,3. **1.10.** M[ξ]=0,442. D[ξ]=0,273. P{-0,5<ξ<0,5}=0,738.

1.11.

x_i	2	3
p_i	0,8	0,2

D[X]=0,16. **1.12.** $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}3$, $p_3 = 0{,}5$. **1.13.** M[X]=3,5. **1.14.**

x_i	0	1	2
p_i	0,25	0,5	0,25

1.15. M[X]=1, D[X]=0,8. **1.16.** M[X]= $n \cdot p$, D[X]= $n \cdot p \cdot q$. **1.17.** P(A)=0,3955, P(B)=0,2637, P(C)=0,7627, P(D)=0,1035.

1.18.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

1.19. p=0,13534. **1.20**. p=0,08. **1.21.** P(A)=0,018, P(B)=0,092, P(C)=0,18, P(D)=0,938. **1.22.** Две опечатки с p=0,251. **1.23.** 0,9. **1.24.** P(A)=0,394, P(B)=0,013, P(C)=0,998. **1.25.** 0,343. **1.26.** M[X]=6, D[X]=30. **1.27.** M[X]=1,538, D[X]=0,828.

1.28. а)

x_i	0	2	…	k	…
p_i	0,6	0,24	…	$0{,}4^{л-1} \cdot 0{,}6$	…

б)

x_i	1	2	3
p_i	0,6	0,24	0,16

1.29. *M[X]=4/3, D[X]=2/9*. **1.30.** M[X]=0, E=0,6931. **1.31.** *c=3/4, M[X]=11/16*.

1.32. а) *p=1/e*; б) $f(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$. **1.33**. а) $f(x) = \frac{m}{x_0} x^{m-1} e^{-\frac{x^m}{x_0}} \quad (x \geq 0)$;

б) $x_p = \{-x_0 \ln(1-p)\}^{\frac{1}{m}}$; в) $\left(\frac{m-1}{m} x_0\right)^{\frac{1}{m}}$. **1.34.** $f(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$;

б) $\sigma\sqrt{\frac{2\lg 2}{\lg e}} \approx 1{,}18\sigma$; в) σ. **1.35.** а) 3; б) 3; в) *M[X]=3*. **1.36.** а) моды нет; б) 0; в) *D[X]=1/2*. **1.37.** а=1/2: $b=1/\pi$; *D[X]=1/2; M[X]=0*. **1.38**. 1) C=1/2; 2) $P\{|X|<\pi/4\}=\sqrt{2}/2$; 3) *M[X]=0*, $D[X]=\frac{\pi^2}{4}-2$; 4) $(2+\sqrt{2})/4$. **1.39.** *P{X≥1}=3/4, M[X]=4/3, D[X]=2/9*. **1.40.** 1) $a=1/\pi$ 2) $F(x)=\frac{1}{\pi}arctgx+\frac{1}{2}$; 3) *P{-1<X<1}=1/2*. **1.41.** *M[X]=0*; $D[X]=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}$. **1.42.** h=1.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ \frac{x^3}{2}+\frac{1}{2}, & -1<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

M[X]=0, *D[X]=3/5*.**1.43.** $\alpha_1=2/3$, $\alpha_2=1/2$, $\alpha_3=2/5$, $\alpha_4=1/3$, $\mu_1=0$, $\mu_2=1/18$, $\mu_3=-1/135$, $\mu_4=1/135$. **1.44.** *M[X]=5;, D[X]=3*. **1.45..** *M[X]=a*; $D[X]=\frac{l^2}{3}$; $E=\sigma\frac{\sqrt{3}}{2}$. **1.46.** *a=1/2*. $M[X^2]=1/12$. **1.47..** 3/7. **1.48**. *pb+a(1-p)*. **1.49.** а) M[X]=7/2; D[X]=49/12; б) 2/7. **1.50.** $P\{X\le 30\}=1-e^{-6}$. **1.51**. $-\frac{\ln(1-p)}{\lambda}$. **1.52**. e^{-10}. **1.53**. 0,134. **1.54**. 0,251. **1.55.** 0,8664. **1.56.** 1) 0,8186; 2) 0,6914. **1.57**. 0,0536. **1.58**. 0,782. **1.59.** *n=7*.

ОТВЕТЫ К РАЗДЕЛУ 2

2.1.

x_i	0	1
p_i	1/2	1/2

y_j	0	1	2
p_j	1/8	3/8	1/2

2.2. C=20, $F(x,y)=\left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{y}{5}+\frac{1}{2}\right)$. **2.3.** C=1.

$f(x)=\begin{cases}x+\frac{1}{2}, x\in(0,1]\\ 0, x\notin(0,1]\end{cases}$, $f(y)=\begin{cases}y+\frac{1}{2}, y\in(0,1]\\ 0, y\notin(0,1]\end{cases}$, *M[X]=M[Y]=7/12*.

2.4. $\rho_{xyz}=\left\|\begin{matrix}1 & -1/2 & 1/2\\ & 1 & -1/2\\ & & 1\end{matrix}\right\|$. **2.5.** $f(x,y)=\begin{cases}10e^{-(5x+2y)}, \text{при } x>0, y>0,\\ 0, \text{при } x<0, y<0.\end{cases}$

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-5x})(1-e^{-2y}), \text{при } x>0,\ y>0,\\ 0, \text{при } x<0,\ y<0.\end{cases}.$$

2.6.

x_i	1	2
p_i	0,8	0,2

y_j	-1	0	1
p_j	0,2	0,35	0,45

P{X=2,Y≥0}=0,15, *P{X>Y}=0,65*, *M[X]=0,25*, *M[Y]=0,25*.

$K_{xy}=\begin{Vmatrix}0{,}16 & 0\\ 0 & 0{,}5875\end{Vmatrix}$. **2.7.** $f(x,y)=\begin{cases}8e^{-4x-2y}, x>0,\ y>0,\\ 0, x<0,\ y<0.\end{cases}$ **2.8.** *c=3/28*, *M[X]=8/7*, M[Y]=10/7. **2.9.** P{Y≥2}=0,113. *M[X]=1,947*. *M[Y]=0,504*.

$K_{ij}=\begin{Vmatrix}2{,}610 & 0{,}561\\ 0{,}561 & 0{,}548\end{Vmatrix}$. **2.10.** *M[X]=M[Y]=0*; $K_{ij}=\begin{Vmatrix}1/2 & 0,\\ 0 & 1/2\end{Vmatrix}$

2.11. $f(x,y)=\begin{cases}\cos x\cos y & \textit{при } 0\le x\le\pi/2,\ 0\le y\le\pi/2,\\ 0, & \textit{в остальных случаях.}\end{cases}.$

$M[X]=M[Y]=\dfrac{\pi}{2}-1.$ $K_{ij}=\begin{Vmatrix}\pi-3 & 0,\\ 0 & \pi-3\end{Vmatrix}$. **2.12.** *M[X]=M[Y]=*$\dfrac{\sqrt{3\pi}}{6}$.

D[X]=D[Y]=$\dfrac{4-\pi}{12}$. **2.13.** *M[X]=M[Y]=*$\dfrac{\pi}{2}$, *D[X]=D[Y]=*π^2-4. **2.14.** C=1/2.

M[X]=M[Y]=$\dfrac{\pi}{4}$, *D[X]=D[Y]=*$\dfrac{\pi^2+8\pi-32}{16}$.

ОТВЕТЫ К РАЗДЕЛУ 3

3.1.

Y	3	9	27
P	0,4	0,1	0,3

3.2.

Y	$\sqrt{2}/2$	1
P	0,3	0,7

3.3.

Y	1	2	5
P	0,1	0,5	0,2

Z	1	2	3
P	0,3	0,5	0,2

3.4. $g(y)=\dfrac{1}{\pi(1+y^2)}$, y~$(-\infty,+\infty)$. **3.5.** $g(y)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$, y~(-1,1).

3.6. $g(y)=\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}$, y~(0,1). **3.7**. $f(y)=\begin{cases}\dfrac{\sin\sqrt{y}}{4\sqrt{y}}, \text{при } y\in(0,\pi^2),\\ 0, \text{при } y\notin(0,\pi^2),\end{cases}$ $M[Y]=\dfrac{\pi^2}{2}-2$, $D[Y]=\dfrac{\pi^4}{4}-4\pi^2+20$. **3.8.** $M[Y]=\dfrac{\pi^2}{4}-2$. $D[Y]=20-2\pi^2$. **3.9.** *g(y)=f(1+y)+f(1-y).* **3.10.** $g(y)=\dfrac{1}{2\sqrt{1-y}}$, y~(0,1). **3.11.** $g(y)=\dfrac{1}{\pi(1+y^2)}$, y~(-$\infty$, +$\infty$). **3.12.** *M[Y]=2,4. D[Y]=1,99.* **3.13.** *M[Y]=0, D[Y]=1/3.* **3.14.** *M[Z}=ln2,* $D[Z]=\dfrac{1}{2}-(\ln 2)^2$. **3.15.** а) *M[2X+3]=a+3*; б) $M[3X^2-2X+1]=a^2-a+1$; в) $\mathrm{D}[2\mathrm{X}+3]=\dfrac{\mathrm{a}^2}{3}$; г) $D[X^2+1]=\dfrac{4}{45}a^4$. **3.16.** *M[Y]=1/2, D[Y]=1/12.* **3.17.** *M[Z]=11.* **3.18.** *M[U]=18. M[V]=17.* **3.19.** *M[Z]=1,9. D[Z]=1,29.* **3.20.** $M[X+Y]=\dfrac{1}{3}(2a+b)$, $M[XY]=\dfrac{31}{180}ab$. $D[3X-6Y+1]=\dfrac{a^2}{2}+2b^2+1{,}8ab$. **3.21.** $\rho_{XX^2}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. **3.22.** *D[X-Y]=13/3,* $M[XY^2+X^2Y]=31/3$. **3.23.** *M[Z]=1, D[Z]=32/3.*

Приложение 1

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,50	0,1915	1,00	0,3413	1,50	0,4332	2,00	0,4772	3,00	0,49865
0,01	0,0040	0,51	0,1950	1,01	0,3438	1,51	0,4345	2,02	0,4783	3,20	0,49931
0,02	0,0080	0,52	0,1985	1,02	0,3461	1,52	0,4357	2,04	0,4793	3,40	0,49966
0,03	0,0120	0,53	0,2019	1,03	0,3485	1,53	0,4370	2,06	0,4803	3,60	0,499841
0,04	0,0160	0,54	0,2054	1,04	0,3508	1,54	0,4382	2,08	0,4812	3,80	0,499928
0,05	0,0199	0,55	0,2088	1,05	0,3531	1,55	0,4394	2,10	0,4821	4,00	0,499968
0,06	0,0239	0,56	0,2123	1,06	0,3554	1,56	0,4406	2,12	0,4830	4,50	0,499997
0,07	0,0279	0,57	0,2157	1,07	0,3577	1,57	0,4418	2,14	0,4838	5,00	0,499997
0,08	0,0319	0,58	0,2190	1,08	0,3599	1,58	0,4429	2,16	0,4846		
0,09	0,0359	0,59	0,2224	1,09	0,3621	1,59	0,4441	2,18	0,4854		
0,10	0,0398	0,60	0,2257	1,10	0,3643	1,60	0,4452	2,20	0,4861		
0,11	0,0438	0,61	0,2291	1,11	0,3665	1,61	0,4463	2,22	0,4868		
0,12	0,0478	0,62	0,2324	1,12	0,3686	1,62	0,4474	2,24	0,4875		
0,13	0,0517	0,63	0,2357	1,13	0,3708	1,63	0,4484	2,26	0,4881		
0,14	0,0557	0,64	0,2389	1,14	0,3729	1,64	0,4495	2,28	0,4887		
0,15	0,0596	0,65	0,2422	1,15	0,3749	1,65	0,4505	2,30	0,4893		
0,16	0,0636	0,66	0,2454	1,16	0,3770	1,66	0,4515	2,32	0,4898		
0,17	0,0675	0,67	0,2486	1,17	0,3790	1,67	0,4525	2,34	0,4904		
0,18	0,0714	0,68	0,2517	1,18	0,3810	1,68	0,4535	2,36	0,4909		
0,19	0,0753	0,69	0,2549	1,19	0,3830	1,69	0,4545	2,38	0,4913		
0,20	0,0793	0,70	0,2580	1,20	0,3849	1,70	0,4554	2,40	0,4918		
0,21	0,0832	0,71	0,2611	1,21	0,3869	1,71	0,4564	2,42	0,4922		
0,22	0,0871	0,72	0,2642	1,22	0,3883	1,72	0,4573	2,44	0,4927		
0,23	0,0910	0,73	0,2673	1,23	0,3907	1,73	0,4582	2,46	0,4931		
0,24	0,0948	0,74	0,2703	1,24	0,3925	1,74	0,4591	2,48	0,4934		
0,25	0,0987	0,75	0,2734	1,25	0,3944	1,75	0,4599	2,50	0,4938		
0,26	0,1026	0,76	0,2764	1,26	0,3962	1,76	0,4608	2,52	0,4941		
0,27	0,1064	0,77	0,2794	1,27	0,3980	1,77	0,4616	2,54	0,4945		
0,28	0,1103	0,78	0,2823	1,28	0,3997	1,78	0,4625	2,56	0,4948		
0,29	0,1141	0,79	0,2852	1,29	0,4015	1,79	0,4633	2,58	0,4951		
0,30	0,1179	0,80	0,2881	1,30	0,4032	1,80	0,4641	2,60	0,4953		
0,31	0,1217	0,81	0,2910	1,31	0,4049	1,81	0,4649	2,62	0,4956		
0,32	0,1255	0,82	0,2939	1,32	0,4066	1,82	0,4656	2,64	0,4959		
0,33	0,1293	0,83	0,2967	1,33	0,4082	1,83	0,4664	2,66	0,4961		
0,34	0,1331	0,84	0,2995	1,34	0,4099	1,84	0,4671	2,68	0,4963		
0,35	0,1368	0,85	0,3023	1,35	0,4115	1,85	0,4678	2,70	0,4965		
0,36	0,1406	0,86	0,3051	1,36	0,4131	1,86	0,4686	2,72	0,4967		
0,37	0,1443	0,87	0,3078	1,37	0,4147	1,87	0,4693	2,74	0,4969		

0,38	0,1480	0,88	0,3106	1,38	0,4162	1,88	0,4699	2,76	0,4971		
0,39	0,1517	0,89	0,3133	1,39	0,4177	1,89	0,4706	2,78	0,4973		
0,40	0,1554	0,90	0,3159	1,40	0,4192	1,90	0,4713	2,80	0,4974		
0,41	0,1591	0,91	0,3186	1,41	0,4207	1,91	0,4719	2,82	0,4976		
0,42	0,1628	0,92	0,3212	1,42	0,4222	1,92	0,4726	2,84	0,4977		
0,43	0,1664	0,93	0,3238	1,43	0,4236	1,93	0,4732	2,86	0,4979		
0,44	0,1700	0,94	0,3264	1,44	0,4251	1,94	0,4738	2,88	0,4980		
0,45	0,1736	0,95	0,3289	1,45	0,4265	1,95	0,4744	2,90	0,4981		
0,46	0,1772	0,96	0,3315	1,46	0,4279	1,96	0,4750	2,92	0,4982		
0,47	0,1808	0,97	0,3340	1,47	0,4292	1,97	0,4756	2,94	0,4984		
0,48	0,1844	0,98	0,3365	1,48	0,4306	1,98	0,4761	2,96	0,4985		
0,49	0,1879	0,99	0,3389	1,49	0,4319	1,99	0,4767	2,98	0,4986		

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вентцель Е. С. Задачи и упражнения по теории вероятностей / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. - М.: Издательский центр «Академия», 2003.- 448 с.

2. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов втузов / В.Е. Гмурман. - М.: Высшая школа, 1979.- 400 с.

3. Емельянов Г. В. Задачник по теории вероятностей и математической статистике / Г.В. Емельянов, В.П. Скитович. - Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1967.- 332 с.

4. Кибзун А.И. Теория вероятностей и математическая статистика / А.И. Кибзун, Е.Р. Горяинова, А.В. Наумов, А.Н. Сиротин. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 224 с.

5. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч. 4: Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для втузов / А.В. Ефимов, А.С. Поспелов.; Под ред. А. В. Ефимова - М.: Издательство Физико-математической литературы, 2003.- 432 с.

6. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистики м теории случайных функций А.А. Свешников / Под ред. А. А. Свешникова - СПб.: Издательство «Лань», 2008.- 448 с.

СОДЕРЖАНИЕ